Условна вероватноћа и независност догађаја - обрада

Понекад је у вези исхода случајног експеримента познато да се неки одређени догађај А остварио тј. тај експеримент се посматра под под претпоставком тј. условом да се догађај А остварио.

Овакав услов мења сам експеримент, па и простор в-ћа па се мењају и в-ће појединих догађаја.

Пример1 Коцка је бачена 2 пута. Познато је да се притом остварио догађај А – „У првом бацању појавио се паран бр". Колика је в-ћа догађаја В – „У два бацања појавили се бр. чији је збир 6"!

$n = 6\cdot 6 = 36$; Пошто знамо да се остварио догађај А онда су бр. који су тада „пали" 2, 4 или 6 тј. има 3 могућности. Зато су све могућности за догађај В $n_b = 3\cdot 6 = 18$. Повољне могућности за В су да је пао бр 4 или бр 2 тј. $m_B = 2$

$$P(B) = \frac{m_B}{n_b} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

Ако А није остварен, повољни исходи за В су (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) тј. $m_B = 5$; а $n_B = 36$, па је $P(B) = \frac{5}{36}$ што је веће него са условом А ⌋

Нека се простор елементарних догађаја састоји од n исхода. Број исхода повољних за догађај А је $m(A)$, где је А догађај који се остварио. Међу овим исходима уочимо оне који су повољни и за догађај В. То су управо исходи повољни и за производ АВ тј. $m(AB)$. Нова в-ћа догађаја В, означимо је са $P(B/A) = \frac{m(AB)}{m(A)}$ тј.

$$P(B/A) = \frac{\frac{m(AB)}{n}}{\frac{m(A)}{n}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Дефиниција 2: Нека је A један случајни догађај такав да је $P(A) \neq 0$ и нека је B произвољан догађај. Условна вероватноћа догађаја B, под условом да се догађај A остварио је број:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}}$$

Из примера 1: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ – појавио се паран број

$P(AB) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ – појавио се збир 6 у два бацања

$$P(B/A) = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}.$$

Независност и зависност догађаја

Дефиниција: Нека је A случајан догађај за који је $P(A) \neq 0$, а B је било који догађај. Рећи ћемо да је догађај B независан од догађаја A, ако остваривање догађаја A не мења вероватноћу догађаја B тј. ако је: $P(B/A) = P(B)$.

$$\left.\begin{aligned} P(B/A) &= P(B) \\ P(B/A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} \end{aligned}\right\} \quad P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \text{тј.} \quad P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

За било која два случајна догађаја A и B важи: догађај B је независан од A ако и само ако $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Ако је догађај B независан од догађаја A, онда је и догађај A независан од догађаја B.

Теорема: Ако су догађаји A и B узајамно независни, тада су независни и догађаји A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Теорема: Ако су догађаји A и B узајамно независни тада је вероватноћа њиховог производа једнака производу вероватноће догађаја A и вероватноће догађаја B.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Теорема: Ако је $P(A) \neq \phi$ и ако је B произвољан догађај тада је вероватноћа производа A·B једнака производу вероватноће A и условне вероватноће догађаја B под условом A.

Дефиниција За догађаје $A_1, A_2, \dots, A_n$ говорићемо да су независни у потпуности ако је сваки од тих догађаја независан од свих производа који се могу формирати од по неколико преосталих догађаја.

Теорема: Ако су $A_1, A_2, \dots, A_n$ независни у потпуности тада важи ф-ла: $P(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

За три догађаја је: $P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB)$.