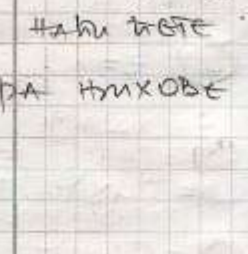
КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

Комплексни бројеви рађени су у II години, али хајде да се подсетимо. Како за $x^2+1=0$, $x\in R$ није имала решење у скупу R, онда се та структура реалних бројева проширује до структуре комплексних бројева у којој се дефинише имагинарна јединица i за коју је $i^2=-1$.
Скуп комплексних бројева дефинише се као скуп свих уређених парова реалних бројева:
$C=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$ за које се дефинише израз $x+iy$, а затим су дефинисане и операције са њима.
Најчешћи облик комплексног броја који се користи је алгебарски облик комплексног броја: $z=x+iy$, $x,y\in R$.
(Особине и операције комплексних бројева наћи ћете на првом прилогу и нешто урађених примера њихове примене како сте радили у II години)
Сада ћемо прећи на:

ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА



Нека је комплексни број $z=x+iy$ представљен тачком M и нека N подножје нормале из M на осу Ox. Тада је: $ON=x$ и $MN=y$
Нека је $OM=r$ и $\measuredangle(OM, Ox)=\varphi$. На основу дефиниције тригонометријских ф-ја биће:

$$\sin\varphi=\frac{MN}{r} \quad \text{и} \quad \cos\varphi=\frac{ON}{r} \quad \text{тј.}$$

$$y=r\cdot\sin\varphi \quad \text{и} \quad x=r\cdot\cos\varphi.$$

Сада се комплексни број $z=x+iy$ може записати:

$$z=r\cdot\cos\varphi+i\cdot r\cdot\sin\varphi \quad \text{тј.} \quad \boxed{z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$$

што представља тригонометријски облик комплексног бр.
Важи: $x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2$ тј. $\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}}$

Како је $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2+y^2$ и како што смо видели $r = \sqrt{x^2+y^2}$, закључујемо: $r = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ и број r се назива модуо комплексног броја: $r = |z|$. Број r је једнозначно одређен.

Број φ није једнозначно одређен јер ако тај број φ задовољава једнакости $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, онда ће сваки број $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ да задовољава исте једнакости.

Број φ се назива аргумент комплексног броја: $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Број φ са интервала $-\pi < \varphi < \pi$ је главни аргумент комплексног броја у ознаци $\arg z$.

Пример Представити у тригонометријском облику комплексне бројеве:

а) i; б) $-i$, в) -1, г) $1+i$; д) $-1+i$

а) $z = i$. Одредимо x, y, r, φ?

$z = x + iy$. Дакле, $x = 0$, $y = 1$. $r = \sqrt{x^2+y^2} = 1$

$x = r\cos\varphi$ тј. $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = 0\\ \sin\varphi = 1\end{array}\right\}$ $\varphi = \frac{\pi}{2} = \arg z$.

$y = r\sin\varphi$

Дакле, $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

б) $z = -i$; $x = 0$, $y = -1$ $r = 1$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = 0\\ \sin\varphi = -1\end{array}\right\}$ $\varphi = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ $z = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$

в) $z = -1$: $x = -1$, $y = 0$ $r = 1$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = -1\\ \sin\varphi = 0\end{array}\right\}$ $\varphi = \pi$ $z = \cos\pi + i\sin\varphi$

г) $x = 1$ $y = 1$ $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

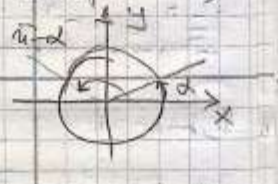
$\left.\begin{array}{l}1 = \sqrt{2}\cos\varphi\\ 1 = \sqrt{2}\sin\varphi\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (I квадрант)

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Д) $z = -1 + i$ $\qquad r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{matrix} x = -1 \\ y = 1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\} \left(\begin{matrix} \cos\varphi < 0 \\ \sin\varphi > 0 \end{matrix} \Rightarrow \varphi \text{ је у II квадранту}\right)$$

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$



$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

МОАВРОВА ФОРМУЛА

Збир више комплексних бројева изражава се као збир њихових реалних и имагинарних делова.

Али, када се говори о производу комплексних бројева, ствар је другачија. Ф-ла какву смо у вези збира могли да изведемо за n комплексних бр:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \dots + y_n),$$

нећемо моћи да напишемо за производ n бр.

Али, ако те комплексне бр представимо у тригоном облику, ситуација је другачија:

Нека је $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Направимо производ:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2 (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2))$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

(примена адиционих ф-ла)

Ако уведемо и $z_3 = r_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \cos\varphi_3 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot i\sin\varphi_3 + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \cos\varphi_3 + i^2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \sin\varphi_3)$$

$$= r_1 r_2 r_3 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\cos\varphi_3 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\sin\varphi_3 + i(\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\cos\varphi_3 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\sin\varphi_3))$$

Применом истих адиционих ф-ла за косинус (синус) збира:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3))$$

Настављајући овај поступак, за n комплексних бр је:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n))}$$

Дакле, модули се помноже, а аргументи се саберу.

Специјално, ако су сви бројеви једнаки Π

$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ добија се степен к. бр.

$$\boxed{z^n = r^n \cdot (\cos n\cdot\varphi + i\cdot\sin n\varphi)}$$ – МОАВРОВА ФОРМУЛА (степен комплексног бр)

Доказаћемо је математичком индукцијом

за $n=1$: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^1\cdot(\cos(1\cdot\varphi) + i\sin(1\cdot\varphi)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

индукцијска претпоставка: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ је тачна за $n\in N$.

за $n+1$: $z^{n+1} = z^n\cdot z = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$= r^{n+1}(\cos n\varphi\cdot\cos\varphi + \cos n\varphi\cdot i\sin\varphi + i\sin n\varphi\cdot\cos\varphi + i^2\sin n\varphi\cdot\sin\varphi)$

$= r^{n+1}(\cos n\varphi\cdot\cos\varphi - \sin n\varphi\cdot\sin\varphi + i(\sin n\varphi\cdot\cos\varphi + \cos n\varphi\sin\varphi))$

$= r^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + i\cdot\sin(n+1)\cdot\varphi$, а то је

управо ф-ла која се добија када се у полазној формули n замени са $n+1$.

Зато је индукцијска претпоставка добра и формула тачна.

Изводи се и формула за количник комплексних бр у тригонометријском облику:

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \land z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}\cdot\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\cdot i\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - i^2\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} \; \Pi$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2))}, \quad z_2 \neq 0$$

Значи, модули се поделе, а аргументи одузму!

Пример Израчунати: $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\cdot 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) =$

$= 6\cdot(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})) = 6\cdot(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$

КОРЕНОВАЊЕ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА:

Нека је n дати природни број и $a(\neq 0)$ дати комплексни број: $a = R(\cos\Theta + i\cdot\sin\Theta)$.

Треба на скупу C решити једначину: $\underline{z^n = a}$, где је $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Једначина постаје:

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$, а Моавровом ф-лом

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = R(\cos\Theta+i\sin\Theta)$$

— Да би комплексни бројеви били једнаки:

$r^n = R$ и $n\varphi = \Theta + 2k\pi$, $k\in Z$ одакле је:

$r=\sqrt[n]{R}$ и $\varphi = \dfrac{\Theta+2k\pi}{n}$, $k\in Z$

Дакле, сваки од бројева z_k је решење ј-не $z^n=a$:

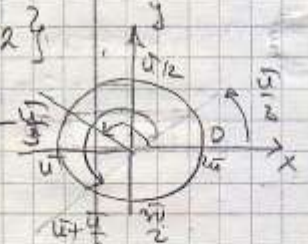
$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\Theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\Theta+2k\pi}{n}\right)}, \quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Пример Одредити све вредности z за које је: $z^3=1$,

$n=3$, $a=1$. Најпре напишемо тригоном. облик бр. a: $x=1$ $y=0$ $R=1$ и $x=R\cos\Theta$ $y=R\sin\Theta$

$$\left.\begin{matrix}\cos\Theta=1\\ \sin\Theta=0\end{matrix}\right\}\ \underline{\Theta=0} \quad \text{тј. } a=\cos 0+i\cdot\sin 0$$

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k\in\{0,1,2\}$$



То су бројеви:

$$z_0=1, \quad z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i = -\frac12(1-\sqrt3 i)$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac12(1+\sqrt3 i)$$

Пример Одредити z^6 ако је $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$.

$r=1$: $z^6=\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}$ јер је $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

$n=6$

$\varphi=\frac{\pi}{6}$ $\quad z^6=-1$.

Примери за вежбу:

1) Написати у тригонометријском облику комплексне бр:

а) $3+3i$ б) $-2+2\sqrt{3}i$ в) $-\sqrt{3}-i$

2) У једначини $(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$ одредити комплексан бр z, па га написати у тригонометријском облику.

3) Одредити производ бр.: $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$ и $z_2=\sqrt{8}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$

4) Одредити количник бројева:

$z_1=10\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ и $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

5) Дати број записати у тригонометријском облику

$$z=\frac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$$

6) Одредити z^{10} ако је $z=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

7) Одредити све вредности z за које је $z^4=-1$.

8) Применом Моаврове формуле, израчунати:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$$