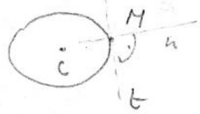
① Одредити једначину нормале круга у његовој тачки M

(I група) $k: x^2+y^2+4x-4y-17=0$ и $M(2,5)$

$x^2+4x+4-4+y^2-4y+4-4-17=0 \Rightarrow (x+2)^2+(y-2)^2=25$



$C(-2,2)$, $r^2=25$

$r^2(1+k^2)=(kp-q+n)^2$
$M\in t:\ 5=2k+n \Rightarrow n=5-2k$

$\left.\right\}\ 25(1+k_t^2)=(-2k_t-2+5-2k_t)^2$
$25+25k_t^2=16k_t^2-24k_t+9$

$9k_t^2+24k_t+16=0 \Rightarrow (3k_t+4)^2=0 \Rightarrow k_t=-\frac{4}{3}$

$n\perp t \Rightarrow k_n=\frac{3}{4}$, $M\in n$ $\Big\}$ $y-5=\frac{3}{4}(x-2)\ /\cdot 4$; $\boxed{3x-4y+14=0 : n}$

(II група) $k: x^2+y^2-6x-8y+17=0$ $M(5,6)$

$k: (x-3)^2+(y-4)^2=8$ $\Big|$ $8(1+k^2)=(3k-4+6-5k)^2$
$M\in t:\ 6=5k+n$ $\Big\}$ $_2\,8(1+k^2)=\,_1\,4(1-k)^2 \Rightarrow 2+2k^2=1-2k+k^2 \Rightarrow (k+1)^2=0$

$k=-1 \Rightarrow k_n=1$

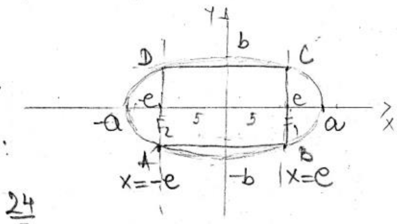
$k_n=1$, $M\in n$ $\Big\} \Rightarrow y-6=x-5$ $\boxed{n: x-y+1=0}$

---

② У елипси $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ уписан је правоугаоник тако да му две наспрамне странице садрже фокусе елипсе. Наћи површину правоугаон.

$a^2=49$ $b^2=24$

$e^2=a^2-b^2=25$ тј. $e=\pm 5$ $<$ $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$



праве кроз жиже су: $x=5 \wedge x=-5$

Нађемо пресечне тачке ових правих и елипсе:

$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1\\ x=5\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{25}{49}+\frac{y^2}{24}=1$, $\frac{y^2}{24}=\frac{24}{49}$ тј. $y_{1,2}=\pm\frac{24}{7}$

Дакле, темена правоугаоника су $A\left(-5,-\frac{24}{7}\right)$, $B\left(5,-\frac{24}{7}\right)$, $C\left(5,\frac{24}{7}\right)$ $D\left(-5,\frac{24}{7}\right)$

Дужине страница су: $a=2\cdot 5=10$, $b=2\cdot\frac{24}{7}=\frac{48}{7}$ $\Big\}$ $P=a\cdot b=\frac{480}{7}$.

---

③ Одредити једначину тангенти конструисаних из дате тачке на дату хиперболу:

(I група) $A(1,0)$, $2x^2-9y^2=18$

$a^2=9$, $b^2=2$, $A\in t:\ 0=k+n$

$9k^2-2=k^2$ тј. $8k^2=2$

$k_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$ $n_{1,2}=\mp\frac{1}{2}$

$t_1:\ y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$t_2:\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

(II група) $D(2,0)$ $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$

$a^2=8$, $b^2=9$, $D\in t:\ 0=2k+n$

$8k-9=4k^2$ тј. $4k^2=9$

$k_{1,2}=\pm\frac{3}{2}$ $n_{1,2}=\mp 3$

$t_1:\ y=\frac{3}{2}x-3$

$t_2:\ y=-\frac{3}{2}x+3$

(4) I Написати једначину тангенте параболе $y^2=9x$ која је паралелна правој $3x+2y-4=0$.

$k_l=-\frac{3}{2}=k_t$, $p=\frac{9}{2}$ $\Big\}$ $p=2kn$; $3\,\frac{\cancel{9}}{2}=-\cancel{3}n$ тј. $n=-\frac{3}{2}$

$$\boxed{t:\ y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}}$$

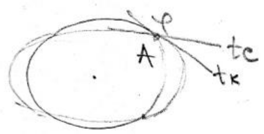
(II група) Написати једначину тангенте параболе $y^2=3x$ која је нормална на праву $2x-3y-4=0$.

$k_l=\frac{2}{3}$, $t\perp l$ $\Big\}$ $k_t=-\frac{3}{2} \wedge p=\frac{3}{2} \wedge p=2kn \Rightarrow \frac{3}{2}=\cancel{2}\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)\cdot n \Rightarrow n=-\frac{1}{2}$

$t:\ y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$.

(5) Одредити угао пресека кривих:

(I група) $(x-5\sqrt{3})^2+y^2=100$, $\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{25}=1$



пресечне тачке: $x^2-10\sqrt{3}x+75+25\left(1-\frac{x^2}{75}\right)=100$

$\frac{2x^2}{3}-10\sqrt{3}x=0 \Rightarrow x=0 \vee x=15\sqrt{3}$ за $x=0$: $y_{1,2}=\pm 5$. Нека је $A(0,5)$

$A\in t$: $n=5$

$r^2(1+k^2)=(kp-q+n)^2$ $\Big\{$ $100(1+k^2)=(5\sqrt{3}k+5)^2$; $100(1+k^2)=25(\sqrt{3}k+1)^2$ $\Big\}$ $4+4k^2=3k^2+2\sqrt{3}k+1$; $(k-\sqrt{3})^2=0$, $k_1=\sqrt{3}$

$\boxed{k_k=\sqrt{3}}$

$n=5$, $a^2k_e^2+b^2=n^2$ $\Big\}$ $75k_e^2+25=25$, $\boxed{k_e=0}$

$tg\varphi=\left|\frac{\sqrt{3}-0}{1+\sqrt{3}\cdot 0}\right|=\sqrt{3}$ тј. $\boxed{\varphi=60^\circ}$

(II група) $k:\ 3x^2+3y^2-32x-128=0\ /:3$ $\quad P:\ y^2=8x$

Пресечне тачке: $3x^2+3\cdot 8x-32x-128=0$; $3x^2-8x-128=0$ $\quad x_{1,2}=\frac{8\pm 40}{6}$ 8, $-\frac{16}{3}$

$A(8,8)$; $x^2+y^2-\frac{32}{3}x-\frac{128}{3}=0$; $\left(x-\frac{16}{3}\right)^2+y^2=\frac{5\cdot 128}{9}$

$A\in t$: $8=8k+n \wedge r^2(1+k^2)=(kp-q+n)^2$:

$5\cdot\frac{128}{9}(1+k^2)=\left(\frac{16}{3}k+8-8k\right)^2$

$5\cdot\frac{128}{9}(1+k^2)=\left(\frac{24-8k}{3}\right)^2$

$5\cdot\frac{\cancel{128}^{2}}{\cancel{9}}(1+k^2)=\frac{\cancel{64}}{\cancel{9}}(3-k)^2$

$10+10k^2=9-6k+k^2$

$9k^2+6k+1=0$

$(3k+1)^2=0 \Rightarrow \boxed{k_1=-\frac{1}{3}}$

$A\in t$: $p=2kn$

$4=2\cdot k_2\cdot(8-8k)$

$4=16k_2(1-k)$

$1=4k_2-4k_2^2$

$4k_2^2-4k_2+1=0$

$(2k_2-1)^2=0$

$\boxed{k_2=\frac{1}{2}}$

$tg\varphi=\left|\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}\right|=\frac{\frac{5}{\cancel{6}}}{\frac{5}{\cancel{6}}}=1$

$\Downarrow$

$\boxed{\varphi=45^\circ}$