Област дефинисаности функције

Функције могу бити задате

- експлицитно $y=f(x)$
- имплицитно $F(x,y)=0$ (кружница, елипса, хипербола ...)

Одређивање области дефинисаности подразумева одређивање скупа вредности за које се дата функција може израчунати, при томе водимо рачуна о следећем:

- паран корен се може израчунати из бројева који су већи или једнаки са нулом $\sqrt[paran]{A} \to A \geq 0$
- нема дељења нулом $\frac{izraz}{A}$ услов $A \neq 0$
- аргумент логаритамских функција мора бити већи од нуле $\log_a A \to A > 0$
- аргумент функције tg мора бити $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
- аргумент функције ctg мора бити $\neq k\pi, k \in Z$
- аргумент функција *arcsin* и *arccos* мора бити број између -1 и 1, односно $|A| \leq 1$ или $-1 \leq A \leq 1$

Одредити област дефинисаности следећих функција :

1. $y = \sqrt{1-x}$

Област дефинисаности ове функције има ограничење аргумент корена мора бити већи или једнак са 0, па имамо $1 - x \geq 0$

$1 \geq x$ односно $x \leq 1$, па је $D_f = (-\infty, 1]$

2. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Област дефинисаности ове функција има два ограничења

- аргумент корена мора бити већи или једнак са 0
- нема дељења са нулом $x \neq 0$

прво ограничење доводи до :

$1 - x^2 \geq 0$

$(1-x)(1+x) \geq 0$

$x \in [-1, 1]$

друго ограничење даје услов $x \neq 0$, па је $D_f = [-1, 0) \cup (0, 1]$

3. $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$

Област дефинисаности ове функције има ограничење - аргумент корена мора бити већи или једнак са 0, па имамо $1 - x \geq 0 \wedge 1 + x \geq 0$, односно

$x \leq 1 \wedge x \geq -1$

$x \in [-1, 1]$

па је $D_f = [-1, 1]$

4. $y = f(x) = x^3 + x^2 - x$

ова функција нема ограничења па је $D_f = R$

5. $f(x)=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

Област дефинисаности ове функција има ограничења - нема дељења нулом, па је

$$1-\cos x \neq 0$$
$$\cos x \neq 1$$
$$x \neq 2k\pi, k \in Z$$

тако да је $D_f = R \setminus \{2k\pi / k \in Z\}$

6. $f(x)=ctg\dfrac{1}{x^2}$

Област дефинисаности ове функција има два ограничења

- аргумент функције *ctg* мора бити $\neq k\pi, k \in Z$ и
- нема дељења са нулом $x^2 \neq 0$

прво ограничење примењено у овом случају доводи до :

$\dfrac{1}{x^2} \neq k\pi \Leftrightarrow x^2 \neq \dfrac{1}{k\pi} \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{\dfrac{1}{k\pi}} \Leftrightarrow x \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}$ где је $k \in Z \setminus \{0\}$

друго ограничење даје $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, па је $D_f = R \setminus \left\{\{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}} / k \in Z \setminus \{0\}\right\}\right\}$

7. $f(x)=\sqrt{\sin\dfrac{1}{x}}$

Област дефинисаности ове функција има два ограничења

- аргумент корена мора бити већи или једнак са 0
- нема дељења са нулом $x \neq 0$

прво ограничење примењено у овом случају доводи до :

$$\sin\frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq \frac{1}{x} \leq \pi + 2k\pi, k \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{\pi+2k\pi} & ,k \in Z^+ \\ \text{није дефинисано} & ,k=0 \\ \dfrac{1}{2k\pi} \leq x \leq \dfrac{1}{-\pi+2k\pi} & ,k \in Z^- \end{cases} \quad \text{где је } k \in Z \setminus \{0\}$$

друго ограничење даје $x \neq 0$, па је заједничка област

$$D_f = \left[\frac{1}{\pi+2k\pi}, +\infty\right), k \in Z^+ \cup \left[\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{-\pi+2k\pi}\right], k \in Z^-$$

8. $f(x)=\arcsin\dfrac{2}{1-x}$

Област дефинисаности ове функција има два ограничења

- аргумент функције *arcsin* мора бити по модулу мањи од један ($|A| \leq 1$) и
- нема дељења са нулом $x-1 \neq 0$

прво ограничење примењено у овом случају доводи до :

$-1 \leq \dfrac{2}{1-x} \leq 1$ односно $\dfrac{1-x}{2} \geq -1 \wedge \dfrac{1-x}{2} \geq 1$ па ће бити

$$1-x \geq -2 \wedge 1-x \geq 2$$
$$-x \geq -3 \wedge -x \geq 1$$
$$x \leq 3 \wedge x \geq -1 \text{ односно } x \geq -1 \wedge x \leq 3$$
$$x \in [-1,3]$$

друго ограничење даје $x \neq 1$, па је заједничка област $D_f = [-1,1) \cup (1,3]$

9. $f(x)=\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

Област дефинисаности ове функција има два ограничења

- аргумент функције *ln* мора бити већи од 0 и
- нема дељења са нулом $x+1\neq 0$

прво ограничење примењено у овом случају доводи до :

$\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}>0$, односно када се бројилац растави на чиниоце биће : $\dfrac{(x-2)(x-1)}{x+1}>0$, па је онда

израз	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x-2$	-	-	-	+
$x-1$	-	-	+	+
$x+1$	-	+	+	+
$\dfrac{(x-2)(x-1)}{x+1}$	-	+	-	+

значи $x\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$

друго ограничење даје $x\neq -1$.Ово ограничење је већ садржано у претходном, па је заједничка област $D_f=(-1,1)\cup(2,+\infty)$

10. $f(x)=\ln\left|4-x^2\right|$

Област дефинисаности ове функција има ограничење да аргумент функције *ln* мора бити већи од 0. Пошто је аргумент функције *ln* апсолутна вредност, онда треба искључити могућност да аргумент буде једнак нули (апсолутна вредност је ≥ 0). Односно

$4-x^2\neq 0$

$x^2\neq 4$

$x\neq\pm\sqrt{4}=\pm 2$, па је онда $D_f=R\setminus\{-2,2\}$

11. $f(x)=\ln\left(e^x-e^{-x}\right)$

Област дефинисаности ове функција има ограничење да аргумент функције *ln* мора бити већи од 0. Примењено овом случају биће :

$e^x-e^{-x}>0\Leftrightarrow e^x-\dfrac{1}{e^x}>0\Leftrightarrow\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}>0$ можемо помножити са e^x**,** јер је e^x>0 па ће бити

$e^{2x}-1>0$

$e^{2x}>1$

$e^{2x}>e^0$ односно $2x>0$**,** па је $x>0$**.** Тако добијамо $D_f=(0,+\infty)$

12. $y=\sqrt{-x^2+x+2}$

Област дефинисаности ове функције има ограничење аргумент корена мора бити већи или једнак са 0, па имамо $-x^2+x+2\geq 0\Leftrightarrow -(x+1)(x-2)\geq 0$

израз	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+1$	-	+	+
$x-2$	-	-	+
$-(x-2)(x-1)$	-	+	-

Што значи да је $D_f=[-1,2]$

13. $y = \sin x + \cos x$

ова функција нема ограничења па је $D_f = R$

14. $y = \ln(1 - 2\cos x)$

Област дефинисаности ове функција има ограничење да аргумент функције *ln* мора бити већи од 0. Примењено овом случају биће :

$$1 - 2\cos x > 0 \Leftrightarrow 1 > 2\cos x \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$$

Значи $D_f = \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in Z$

15. $y = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 2}$

Област дефинисаности ове функција има ограничење - нема дељења са нулом $x^2 - x + 2 \neq 0$

$x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$, дискриминанта је мања од нуле, па су корени ове једначине коњуговано комплескни бројеви, односно израз $x^2 - x + 2 > 0 (\forall x \in R)$, зато што је a = 1>0, па је $D_f = R$