

## Izvod funkcije

1. Odrediti izvod sledećih funkcije

$$(a) y = x^3 - x + 1 \quad (b) y = 3x^4 - 2x^2 + 3x - 6 \quad (c) y = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - 2x + 3$$

$$(d) y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{3} \quad (e) y = \sqrt[4]{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3} + \pi \quad (f) y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x^5} + 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} -$$

rešenje:

$$(a) 3x^2 - 1 \quad (b) 12x^3 - 4x + 3 \quad (c) -\frac{3}{x^4} - \frac{8}{x^3} - 2$$

$$(d) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (e) y' = \frac{1}{4\sqrt[3]{x^3}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4} \quad (f) y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 5\sqrt{x^3} + \frac{2}{3\sqrt{x^2}} - \frac{6}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

2. Odrediti izvod sledećih funkcije

$$(a) y = x^3 + 3^x \quad (b) y = \sin x - \cos x \quad (c) y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x$$

$$(d) y = 2e^x - \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x \quad (e) y = e^x + \ln x - \sqrt{x} \quad (f) y = \ln x - \log_2 x + 4e^x$$

rešenje:

$$(a) y' = 3x^2 + 3^x \ln 3 \quad (b) y' = \cos x - \sin x \quad (c) y' = 0$$

$$(d) y' = 2e^x - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} \quad (e) y' = e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (f) y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln 2} + 4e^x$$

3. Odrediti izvod proizvoda funkcija

$$(a) y = x(2x^3 + 3x) \quad (b) y = (x-1)(5x^6 - 4x^3 + 1) \quad (c) y = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 1)$$

rešenje:

$$(a) y' = 8x^3 + 6x \quad (b) y' = 1 + 12x^2 - 16x^3 - 30x^5 + 35x^6 \quad (c) y' = 2 + 4x - 6x^2 + 4x^3$$

4. Odrediti izvod proizvoda funkcija

$$(a) y = (x^2 + 3x - 9)e^x \quad (b) y = x^5 e^x \quad (c) y = x^4 \ln x$$

$$(d) y = x^3 \log_8 x \quad (e) y = x \log_6 x \quad (f) y = (2x^2 - 1)(\ln x - 2)$$

rešenje:

$$(a) y' = (x^2 + 5x - 6)e^x \quad (b) y' = e^x x^4 (5 + x) \quad (c) y' = x^3 (1 + 4 \ln x)$$

$$(d) y' = 3x^2 \log_8 x + \frac{x^2}{\ln 8} \quad (e) y' = \log_6 x + \frac{1}{\ln 6} \quad (f) y' = -\frac{1}{x} - 6x + 4x \ln x$$

5. Odrediti izvod proizvoda funkcija

$$(a) y = e^x \cos x \quad (b) y = (2x^2 - x + 1) \sin x \quad (c) y = x \operatorname{ctg} x$$

$$(d) y = e^x \operatorname{arctg} x \quad (e) y = e^x \arcsin x \quad (f) y = \sin x (1 - \cos x)$$

rešenje:

$$(a) y' = e^x (\cos x - \sin x) \quad (b) y' = (1 - x + 2x^2) \cos x + (4x - 1) \sin x \quad (c) y' = \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$$

$$(d) y' = e^x \left( \frac{1}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \right) \quad (e) y' = e^x \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x \right) \quad (f) y' = \cos x - \cos 2x$$

## 6. Odrediti izvod količnika funkcija

$$(a) y = \frac{x}{300-x} \quad (b) y = \frac{3x-1}{2x+5} \quad (c) y = \frac{x^2+1}{x^3-1}$$

$$(d) y = \frac{3x^2-5x}{x^8} \quad (e) y = \frac{4x+3}{\sqrt{x}} \quad (f) y = \frac{6x^2-3x}{3\sqrt{x}}$$

rešenje:

$$(a) y' = \frac{300}{(x-300)^2} \quad (b) y' = \frac{17}{(2x+5)^2} \quad (c) y' = -\frac{x^4+3x^2+2x}{(x^3-1)^2}$$

$$(d) y' = \frac{35-18x}{x^8} \quad (e) y' = \frac{4x-3}{2x\sqrt{x}} \quad (f) y' = \frac{6x-1}{2\sqrt{x}}$$

## 7. Odrediti izvod količnika funkcija

$$(a) y = \frac{1+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x} \quad (b) y = \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} \quad (c) y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$(d) y = \frac{\ln x - 1}{\ln x} \quad (e) y = \frac{\ln x}{\ln x - 2} \quad (f) y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$$

$$(g) y = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x} \quad (h) y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \quad (i) y = \frac{\ln x}{1+x^2}$$

rešenje:

$$(a) y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (b) y' = \frac{1}{1-\sin 2x} \quad (c) y' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$(d) y' = \frac{1}{x \ln^2 x} \quad (e) y' = -\frac{2}{x(\ln x - 2)^2} \quad (f) y' = \frac{\pi}{(\arccos x)^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$(g) y' = \frac{2x}{\operatorname{arctg} x} - \frac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2} \quad (h) y' = -\frac{2}{x(\ln x + 1)^2} \quad (i) y' = \frac{1+x^2-2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2}$$

## 8. Odrediti izvod funkcije

$$(a) y = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2} \quad (b) y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$$

$$(c) y = e^x \sin x + x \cos x \quad (d) y = x \operatorname{arctg} x - (x-1) \operatorname{arcctg} x$$

rešenje:

$$(a) y' = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \quad (b) y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$(c) y' = (1 + e^x) \cos x + (e^x - x) \sin x \quad (d) y' = \frac{2x-1}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$$

9. Data je funkcija  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ . Odrediti  $f'(2)$ ,  $f'(-1)$ . (rešenje:  $f'(2) = -\frac{3}{25}$ ,  $f'(-1) = 0$ )10. Data je funkcija  $f(x) = 3 \arcsin x - 2 \arccos x$ . Odrediti  $f'(\frac{3}{5})$  (rešenje:  $f'(\frac{3}{5}) = -\frac{3}{25}$ )

## 11. Date su funkcije

$$f(x) = \frac{ax}{a+x}, \quad g(x) = ax^3 - (a-1)x^2, \quad a \in R$$

Rešiti jednačinu  $f'(x) = g'(x) + \frac{a^2}{(a+x)^2}$ rešenje:  $x = 0$ ,  $x = \frac{2(1-a)}{3a}$ 

## 12. Data je funkcija

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{a+2}{2}x^2 + 3ax + a, \quad \text{gde } a \in R.$$

Odrediti sve realne vrednosti  $x$  za koje je  $f'(x) = a$ rešenje:  $x = 2$ ,  $x = a$

## Tangente i normale grafika funkcije $f(x)$

13. Odrediti jednačine tangente grafika funkcije  $f(x)$  u tački  $A$

$$(a) f(x) = x^3 - 2x + 1, A(2, y_0) \quad (b) f(x) = x^2 - \sqrt{x}, A(1, y_0) \quad (c) f(x) = \frac{8}{x^2+4}, A(x_0 < 0, 1)$$

$$(d) f(x) = x^2 + \frac{3}{x-1}, A(2, y_0) \quad (e) f(x) = \frac{6x}{x^2-1}, A(x_0 > 0, 4) \quad (f) f(x) = x + \frac{4}{x}, A(x > 2, 4)$$

rešenje:

$$(a) y = 10x - 15 \quad (b) y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \quad (c) y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$(d) y = x + 5 \quad (e) y + 6x - 16 = 0 \quad (f) y = \frac{3}{4}x + 2$$

14. Odrediti jednačinu normale grafika funkcije  $f(x)$  u tački  $A$

$$(a) f(x) = 2x^2 - 4x + 5, A(3, y_0) \quad (b) f(x) = \frac{5x^2}{1+x^2}, A(x_0 > 0, 4) \quad (c) f(x) = x \cdot \ln x, A(1, y_0)$$

rešenje:

$$(a) 8y + x - 91 = 0 \quad (b) 5x + 4y - 26 = 0 \quad (c) y = -x + 1$$

## Izvod složene funkcije

15. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$(a) y = (1 - x^2)^3 \quad (b) y = (1 + x^3)^5 \quad (c) y = \sqrt{1 + x^3}$$

$$(d) y = \sqrt{(x^2 - x + 1)^5} \quad (e) y = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2} \quad (f) y = \left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)^4$$

$$(g) y = \left(\frac{2x+3}{5x-1}\right)^{-4} \quad (h) y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (i) y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$$

rešenje:

$$(a) y' = -6x(1 - x^2)^2 \quad (b) y' = 15x^2(1 + x^3)^4 \quad (c) y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$$

$$(d) y' = \frac{5}{2}(2x - 1)\sqrt{(x^2 - x + 1)^3} \quad (e) y' = \frac{4x^3 + 6x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^4 + 3x^2)^2}} \quad (f) y' = \left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)^3 \cdot \frac{44}{(5x+2)^2}$$

$$(g) y' = \left(\frac{2x+3}{5x-1}\right)^{-5} \cdot \frac{68}{(5x-1)^2} \quad (h) y' = -\frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (i) y' = -\frac{2x}{3 \sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$$

16. Data je funkcija  $f(x) = \sqrt{(x^2 + x + 2)^3}$ . Odrediti  $f'(1)$ .

rešenje:  $f'(x) = \frac{3}{2}(2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 2}$ ,  $f'(1) = 9$ .

17. Data je funkcija  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ . Odrediti  $f'(2)$ .

rešenje:  $f'(2) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

18. Data je funkcija  $f(x) = (1 - 2\sqrt{x})^4$ . Odrediti  $f'(1)$ .

rešenje:  $f'(1) = 4$ .

19. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$(a) y = \cos^2 x \quad (b) y = \cos x^2 \quad (c) y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$$

$$(d) y = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \quad (e) y = 3 \sin(3x + 5) \quad (f) y = \operatorname{tg} \frac{x+1}{2}$$

rešenje:

$$(a) y' = -\sin 2x \quad (b) y' = -2x \sin x^2 \quad (c) y' = \operatorname{tg}^4 x$$

$$(d) y' = -\sin^3 x \quad (e) y' = 9 \cos(3x + 5) \quad (f) y' = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}$$

20. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$(a) y = \ln(1 - 2x) \quad (b) y = \ln(x^2 - 4x) \quad (c) y = \ln \sin x$$

$$(d) y = \ln \operatorname{tg} x \quad (e) y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x + \ln \cos x \quad (f) y = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln \cos x$$

$$(g) y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x \quad (h) y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \quad (i) y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$$

rešenje:

$$(a) y' = -\frac{2}{1-2x} \quad (b) y' = \frac{2x-4}{x^2-4x} \quad (c) y' = \operatorname{ctg} x$$

$$(d) y' = \frac{2}{\sin 2x} \quad (e) y' = \operatorname{ctg} 2x \quad (f) y' = \operatorname{tg}^5 x$$

$$(g) y' = \operatorname{tg}^3 x \quad (h) y' = -\frac{1}{\cos x} \quad (i) y' = \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$$

21. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$(a) y = \arcsin \frac{x}{2} \quad (b) y = \arcsin 2x \quad (c) y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

$$(d) y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \quad (e) y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \quad (f) f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

$$(g) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (h) y = \sqrt{4x-x^2} + 4 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} \quad (i) y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$$

rešenje:

$$(a) y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (b) y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \quad (c) y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(d) y' = \frac{2}{1+x^2} \quad (e) y' = \frac{x^2}{1-x^4} \quad (f) y' = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(g) y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (h) y' = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{4-x} \quad (i) y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$$

22. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$(a) y = e^{x^2-5x} \quad (b) y = e^{5x} \quad (c) y = e^{-x^2+4x-7}$$

$$(d) y = e^{\sqrt{x^2-3}} \quad (e) y = e^{-x} \quad (f) y = 1 - e^{-2x}$$

rešenje:

$$(a) y' = (2x - 5)e^{x^2-5x} \quad (b) y' = 5e^{5x} \quad (c) y' = (-2x + 4)e^{-x^2+4x-7}$$

$$(d) y' = \frac{x \cdot e^{\sqrt{x^2-3}}}{\sqrt{x^2-3}} \quad (e) y' = -e^{-x} \quad (f) y' = 2e^{-2x}$$

## Izvodi višeg reda

23. Odrediti drugi izvod sledećih funkcija:

$$(a) y = x^5 - 3x^4 + x \quad (b) y = \frac{1}{x} \quad (c) y = e^x \sin x$$

$$(d) y = \frac{1-x}{1+x} \quad (e) y = \ln \sin x \quad (f) y = \operatorname{arctg} x$$

rešenje:

$$(a) y'' = 20x^3 - 36x \quad (b) y'' = \frac{2}{x^3} \quad (c) y'' = 2e^x \cos x$$

$$(d) y'' = \frac{4}{(1+x)^3} \quad (e) y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \quad (f) y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

24. Odrediti treći izvod sledećih funkcija:

$$(a) y = x^5 - 2x^4 + 3x \quad (b) y = \frac{2}{x} \quad (c) y = e^{2x+3}$$

$$(d) y = x^2 \ln x \quad (e) y = \cos^2 x \quad (f) y = \ln(x-2)$$

rešenje:

$$(a) y''' = 60x^2 - 48x \quad (b) y''' = -\frac{12}{x^4} \quad (c) y''' = 8e^{2x+3}$$

$$(d) y''' = \frac{2}{x} \quad (e) y''' = 4 \sin 2x \quad (f) y''' = \frac{2}{(x-2)^3}$$

25. Data je funkcija  $f(x) = e^x \sin x$ . Dokazati da važi:  $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$ .

26. Data je funkcija  $f(x) = 2x^2 - 1$ . Dokazati da važi:  $(x^2 - 1)f''(x) + xf'(x) - 4f(x) = 0$ .

27. Data je funkcija  $f(x) = x^3 \ln x$ . Odrediti  $f^{(IV)}(2)$ .

rešenje:  $f^{(IV)}(x) = \frac{6}{x}$ ,  $f^{(IV)}(2) = 3$

28. Data je funkcija  $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$ . Odrediti  $f^{(IV)}(1)$ .

rešenje:  $f^{(IV)}(x) = 360x^2$ ,  $f^{(IV)}(1) = 360$

29. Data je funkcija  $f(x) = a \sin 2x$ , gde je  $a \in \mathbb{R}$ . Odrediti  $f^{(IV)}(\frac{\pi}{12})$ .

rešenje:  $f^{(IV)}(x) = 16a \sin 2x$ ,  $f^{(IV)}(\frac{\pi}{12}) = 8a$

30. Data je funkcija  $f(x) = Ae^x - Be^{-x}$ , gde su  $A$  i  $B$  proizvoljni realni brojevi. Dokazati da je  $f''(x) = f(x)$ .

31. Data je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(6-3a)x^2 - 2(a+4)x + 8, \text{ gde } a \in \mathbb{R}. \text{ Odrediti broj } a \text{ tako da važi jednakost}$$

$$\frac{1}{f(0)}(f''(-2) - f'(-1)) = -0.125$$

rešenje:  $a = 1$

32. Dokazati da funkcija  $f(x) = A \sin(mx+n) + B \cos(mx+n)$ , gde su  $A, B, m, n$  konstante, zadovoljava jednačinu  $f''(x) + m^2 f(x) = 0$ .

33. Dokazati da funkcija  $f(x) = \cos e^x + \sin e^x$  zadovoljava jednačinu  $f''(x) - f'(x) + e^{2x} f(x) = 0$ .

## Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije, konveksnost (konkavnost) i prevojne tačke funkcije

34. Ispitati monotonost i odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$(a) f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (b) f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^3}{3-x^2} \quad (d) f(x) = x\sqrt{x+3}$$

$$(e) f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+1}} \quad (f) f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$$

$$(g) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^2-1} \quad (h) y = x^2 \ln x$$

$$(i) y = (x-1) \ln^2(x-1) \quad (j) y = (2+x^2)e^{-x^2}$$

$$(k) f(x) = (3-x^2)e^{-x} \quad (l) f(x) = \frac{e^x}{x}$$

rešenje:

$$(a) D_f : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty), \quad f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ ,  $A_{\min}(0, 1)$

$$(b) D_f : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty), \quad f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-3, -1)$ ,  $A_{\max}(-3, -\frac{27}{8})$

$$(c) D_f : x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty), \quad f'(x) = -\frac{x^2(x^2-9)}{(3-x^2)^2}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$ , opadajuća za  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ ,  $A_{\min}(-3, \frac{9}{2})$ ,  $B_{\max}(3, -\frac{9}{2})$

$$(d) f'(x) = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$$

$D_f : x \in [-3, \infty)$ , funkcija je rastuća za  $x \in (-2, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-3, -2)$ ,  $A_{\min}(-2, -2)$

$$(e) D_f : x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-\frac{1}{3}, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-\infty, -\frac{1}{3})$ ,  $A_{\min}(-\frac{1}{3}, -\sqrt{10})$

$$(f) D_f : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-1, 1)$ ,  $A_{\min}(1, 1)$

$$(g) D_f : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f'(x) = \frac{2x}{-2x^4 + 2x^2 - 1}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ , opadajuća za  $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ ,  $A_{\max}(0, 0)$

$$(h) D_f : x \in (0, \infty), \quad y' = 2x \ln x + x$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$ ,  $A_{\min}(e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2e})$

$$(i) D_f : x \in (1, \infty), \quad y' = \ln(x-1) \cdot (\ln(x-1) + 2)$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (1, 1+e^{-2}) \cup (2, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (1+e^{-2}, 2)$ ,  $A_{\max}(1+e^{-2}, \frac{4}{e^2})$ ,  $B_{\min}(2, 0)$

$$(j) y' = -2e^{-x^2} \cdot x \cdot (x^2 + 1)$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-\infty, 0)$ , opadajuća za  $x \in (0, \infty)$ ,  $A_{\max}(0, 2)$

$$(k) f'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 3)$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-1, 3)$ ,  
 $A_{\max}(-1, 2e)$ ,  $B_{\min}(3, -\frac{6}{e^3})$

$$(l) D_f : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (1, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ ,  $A_{\min}(1, e)$

35. Odrediti najmanju i najveću vrednost

(a) funkcije  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$  na intervalu  $[-1, 2]$

(b) funkcije  $f(x) = x^2 - 4x + 7$  na intervalu  $[1, 4]$

(c) funkcije  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$  na intervalu  $[-5, 5]$

(d) funkcije  $f(x) = e^x + e^{-x}$  na intervalu  $[-1, 2]$

rešenje: (a) Najmanja vrednost se dostiže za  $x = -1$  i  $f(-1) = -5$ , a najveća za  $x = 2$  i iznosi  $f(2) = 4$ ;

(b) najmanja vrednost je 3, a najveća 7;

(c) najmanja vrednost je  $-86$ , a najveća 400;

(d) najmanja vrednost je 2, a najveća  $e^2 + 1/e^2$

36. Odrediti intervale konveksnosti (konkavnosti) i prevojne tačke funkcije

$$(a) y = x^4 - 2x^2 \quad (b) y = x^3 - 3x^2$$

$$(c) y = x^6 - 5x^4 + 2 \quad (d) y = x^3 + \frac{x^4}{4}$$

$$(e) y = (x+1)e^x \quad (f) y = (x^2 + 5x + 2)e^x$$

rešenje:

$$(a) y' = 4x^3 - 4x, \quad y'' = 12x^2 - 4$$

Funkcija je konveksna za  $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ , a konkavna za  $x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ,  
 prevojne tačke  $P_1(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9})$ ,  $P_2(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9})$

$$(b) y' = 3x^2 - 6x, \quad y'' = 6x - 6$$

Funkcija je konveksna za  $x \in (1, \infty)$ , a konkavna za  $x \in (-\infty, 1)$ ,  
 prevojna tačka  $P(1, -2)$

$$(c) y' = 6x^5 - 20x^3, \quad y'' = 30x^2(x^2 - 2)$$

Funkcija je konveksna za  $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ , a konkavna za  $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  
 prevojne tačke  $P_1(-\sqrt{2}, -10)$ ,  $P_2(\sqrt{2}, -10)$

$$(d) y' = 3x^2 + x^3, \quad y'' = 6x + 3x^2$$

Funkcija je konveksna za  $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ , a konkavna za  $x \in (-2, 0)$ ,  
 prevojne tačke  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(-2, -4)$

$$(e) y' = e^x(x+2), \quad y'' = e^x(x+3)$$

Funkcija je konveksna za  $x \in (-3, \infty)$ , a konkavna za  $x \in (-\infty, -3)$ ,  
prevojna tačka  $P(-3, -2e^{-3})$

$$(f) y' = e^x(x^2 + 7x + 7), \quad y'' = e^x(x^2 + 9x + 14)$$

Funkcija je konveksna za  $x \in (-\infty, -7) \cup (-2, \infty)$ , a konkavna za  $x \in (-7, -2)$ ,  
prevojne tačke  $P_1(-7, 16e^{-7})$ ,  $P_2(-2, -4e^{-2})$

## Lopitalovo pravilo

37. Primenom Lopitalovog pravila izračunati granične vrednosti

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{e^x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{5x^2 - x^3}$$

rešenje: (a) 1, (b) 10, (c) 0, (d) 0, (e)  $\frac{1}{5}$

38. Odrediti granične vrednosti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 2 \cos x + 1}{x^2} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln(1 + \frac{1}{x})} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}$$

rešenje: (a) -1, (b) 2, (c)  $\frac{2}{5}$ , (d) 2, (e)  $\infty$