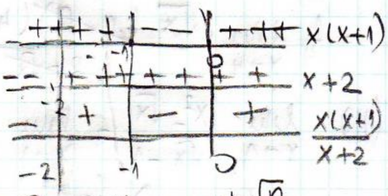
(1) Одредити област дефинисаности, нуле и знак ф-је:

(I) $y=\log\frac{x(x+1)}{x+2}$



- дефинисаност: $\frac{x(x+1)}{x+2}>0 \land x+2\neq 0$

$x\in(-2,-1)\cup(0,+\infty)$

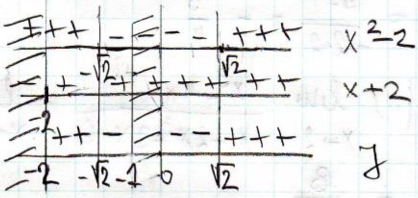
- нуле: $y=0: \frac{x(x+1)}{x+2}=1 \Rightarrow x^2+\cancel{x}-\cancel{x}-2=0 \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$

$A(\sqrt{2},0)$ $B(-\sqrt{2},0)$ су тачке пресека графика и осе Ox.

Нема пресек са осом Oy због D_f.

- знак: $y>0: \log\frac{x(x+1)}{x+2} > \log 1$

$\frac{x(x+1)}{x+2}-1>0 \Rightarrow \frac{x^2-2}{x+2}>0$



$y>0: x\in(-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

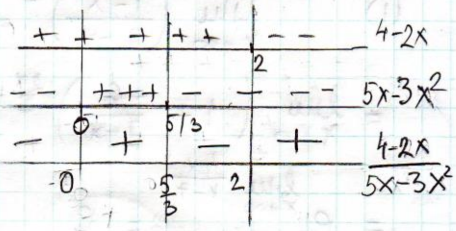
$y<0: x\in(-\sqrt{2},-1)\cup(0,\sqrt{2})$

(II) $y=\ln\frac{4-2x}{5x-3x^2}$

дефинисаност: $\frac{4-2x}{5x-3x^2}>0 \land 5x-3x^2\neq 0$

$x\neq 0$

$x\neq \frac{5}{3}$



$x\in\left(0,\frac{5}{3}\right)\cup(2,+\infty)$

Нуле: $y=0: \frac{4-2x}{5x-3x^2}=1 \Rightarrow 4-2x=5x-3x^2 \Rightarrow 3x^2-7x+4=0$

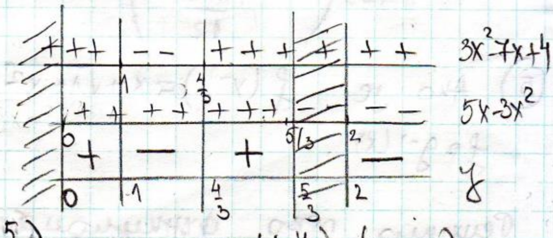
$x_{1,2}=\frac{7\pm1}{6}=\begin{cases}1\\ \frac{4}{3}\end{cases}$

$A(1,0)$ $B(\frac{4}{3},0)$ су пресеци са Ox.

Нема пресек са осом Oy.

Знак $y>0: \frac{4-2x}{5x-3x^2}>1 \Rightarrow$

$\frac{3x^2-7x+4}{5x-3x^2}>0$



$y>0: x\in(0,1)\cup\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$; $y<0: x\in\left(1,\frac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$

2) Израчунати граничну вредност функције

(I) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{8\sqrt{x}-x^2}{8-4\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8\sqrt{x}-x^2}{2-\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}\left(2^3-(\sqrt{x})^3\right)}{2-\sqrt{x}} =$

$= \dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}\,\cancel{(2-\sqrt{x})}(4+2\sqrt{x}+x)}{\cancel{2-\sqrt{x}}} = \dfrac{1}{4}\cdot\sqrt{4}\,(4+2\sqrt{4}+4) = \dfrac{1}{2}\cdot 12 = 6.$

(II) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}\left((\sqrt{x})^3-1\right)}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}\,\cancel{(\sqrt{x}-1)}(x+\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} =$

$= 1\cdot(1+1+1) = 3.$

3) Израчунати граничну вредност функције

(I) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2(x+2)-(x+2)}{x^2-2^2} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\cancel{(x+2)}(x^2-1)}{\cancel{(x+2)}(x-2)}$

$= \dfrac{4-1}{-2-2} = -\dfrac{3}{4}$

(II) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x}{x^4-2x^3+3x-6} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x^2-4)}{x^3(x-2)+3(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)x}{\cancel{(x-2)}(x^3+3)} =$

$= \dfrac{8}{11}$

4) Израчунати:

(I) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{7-x}\right)^{\frac{2x}{3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7-x-7+x+1-x}{7-x}\right)^{\frac{2x}{3}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-6}{7-x}\right)^{\frac{2x}{3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-7}{6}}\right)^{\frac{x-7}{6}\cdot\frac{6}{x-7}\cdot\frac{2x}{3}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-7}} = e^{4}$

(II) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-9}\right)^{\frac{2x}{3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-9-x+9+x+3}{x-9}\right)^{\frac{2x}{3}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-9}{12}}\right)^{\frac{x-9}{12}\cdot\frac{12}{x-9}\cdot\frac{2x}{3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x}{x-9}} = e^{8}.$

5) Ако је $f(x^{-1}) = x+\sqrt{1+x^2}$ и $g(3x-1) = \dfrac{3x}{2}$, одредити $f\circ g^{-1}(x)$.

Решимо прво функционалне јне тј. одредимо $f(x), g(x)$.

$f(x) = ?$

смена: $x^{-1} = t$

$x = \frac{1}{t}$

$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t}$

$$\boxed{f(x) = \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}}$$

$g(x) = ?$

смена: $3x - 1 = p \Rightarrow x = \frac{p+1}{3}$

$g(p) = \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{(p+1)}{\cancel{3}}$

$$\boxed{g(x) = \frac{x+1}{2}}$$

$g^{-1}(x) = ?$ доказ бијективног пресликавања

$g: R \to R$

„1-1" $x_1, x_2 \in R \wedge x_1 \neq x_2$;

$x_1 + 1 \neq x_2 + 1 \quad / \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}(x_1 + 1) \neq \frac{1}{2}(x_2 + 1)$

$f(x_1) \neq f(x_2)$

„На" $y \in R \wedge y = \frac{x+1}{2}$ тада постоји $x = 2y - 1 \in R$ (јер $y \in R$)

такав да је $g(x) = \frac{2y - 1 + 1}{2} = y$.

Јесте је биекција $\Rightarrow$ постоји g^{-1}

$g^{-1}(g(x)) = x \rightarrow g^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) = x$

смена: $y = \frac{x+1}{2}$

$g^{-1}(y) = 2y - 1 \Rightarrow \boxed{g^{-1}(x) = 2x - 1}$

Конačно је:

$$f \circ g^{-1}(x) = f(g^{-1}(x)) = \frac{1 + \sqrt{1 + (g^{-1}(x))^2}}{g^{-1}(x)} = \frac{1 + \sqrt{1 + (2x-1)^2}}{2x-1} =$$

$$= \frac{1 + \sqrt{1 + 4x^2 - 4x + 1}}{2x-1} = \frac{1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 2}}{2x-1}.$$