Задаци за 2

1. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-2n+5}{4n^2+n-6}$

2. Решити по x једначину, ако је лева страна аритметички низ: $3+7+11+\dots+x=210$

3. Број $z=3+3i$ написати у тригонометријском облику.

4. Одредити количник бројева $z_1=6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ и $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

5. Коришћењем Моаврове формуле одредити z^6, ако је $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$.

Решења:

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\cancel{\frac{2}{n}}+\cancel{\frac{5}{n^2}}}{4+\cancel{\frac{1}{n}}-\cancel{\frac{6}{n^2}}}=\dfrac{3}{4}$

$\boxed{2}$ $a_1=3$; $d=4$; $x=a_n$

$n=?$; $S_n=\frac{n}{2}\left(6+(n-1)\cdot 4\right)$

$210=(3+2n-2)n$

$2n^2+n-210=0$

$n_{1,2}=\begin{cases}-21/2\\ 10\end{cases}$

дакле, $\boxed{n=10}$

$x=a_n=3+9\cdot 4=39$, $\boxed{x=39}$

$\boxed{3}$ $z=3+3i$

$x=3=r\cdot\cos\varphi$, $\quad \operatorname{tg}\varphi=1$

$y=3=r\cdot\sin\varphi$, $\quad \boxed{\varphi=\frac{\pi}{4}}$

$r^2=x^2+y^2=9+9=18 \Rightarrow \boxed{r=3\sqrt{2}}$

$z=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$

$z=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$

или

$z=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$, $k\in Z$

$\boxed{4}$ $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{6}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$=3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\boxed{5}$ $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

$z^6=\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}$

$z^6=\cos\pi+i\sin\pi$

$\boxed{z^6=-1}$

Задаци за 3

1) Израчунати: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{2n+1}+\frac{1-6n^3}{1+4n^2}\right)$

2) Наћи странице правоуглог троугла, ако оне чине аритметички низ са диференцијом 3

3) Дати број $z=\frac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$ написати у тригонометријском облику.

4) Одредити количник бројева $z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ и $z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

5) У једначини $(i-z)\cdot(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$ одредити број z, па коришћењем Моаврове формуле одредити z^4.

Решења:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2(1+4n^2)+(2n+1)(1-6n^3)}{(2n+1)(1+4n^2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+\cancel{12n^4}+2n-\cancel{12n^4}+1-6n^3}{2n+8n^3+1+4n^2}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n^3+3n^2+2n+1}{8n^3+4n^2+2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{8+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.$

2. Ако су $a, a+3, a+6$ странице троугла, треба да задовоље Питагорину теорему да би Δ био правоугли.

$(a+6)^2=a^2+(a+3)^2$; $a^2+12a+36=2a^2+6a+9$; $a^2-6a-27=0$

$a_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+108}}{2}=\frac{6\pm12}{2}=\left\langle\begin{matrix}9\\-3\end{matrix}\right.$; $\boxed{a=9}$ тј. стр. су: 9, 12, 15

4. $\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$

3. $z=\frac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$

$z_1=i-1=-1+i$

$\left.\begin{matrix}x=-1\\y=1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}r\cos\varphi=-1\\r\sin\varphi\end{matrix}\right\}\ \operatorname{tg}\varphi=-1$ тј. $\boxed{\varphi=\frac{3\pi}{4}}$

$z=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

5. $i+2i^2-z-2zi+3-4i-3iz+4i^2z=1+7i$; $-5z-5zi-10i=0$

$-5z(1+i)=10i$; $z=-\frac{2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{-2(i-i^2)}{2}=-1-i$

$r=\sqrt{2}$; $\left.\begin{matrix}-1=\sqrt{2}\cos\varphi\\-1=\sqrt{2}\sin\varphi\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\cos\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right\}\ \varphi\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\varphi=\frac{5\pi}{4}$

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

Задаци за (4)

1) Израчунати: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+5+9+\dots+(4n-3)}{2(n+1)}-n\right)$

2) У геометријском низу први, трећи и пети члан редом једнаки су првом, четвртом и шеснаестом члану неког аритметичког низа. Ако је први члан тог аритметичког низа 5, одредити четврти члан тог низа, као и седми члан геометријског низа.

3) Написати комплексан број $z=(\sqrt{3}-i)^{100}$ у тригонометријском облику.

4) Наћи вредности z такве да је $z^4=-16$

5) Доказати: $(\sqrt{3}-i)^n+(\sqrt{3}+i)^n=2^{n+1}\cdot\cos\frac{n\pi}{6}$

Решења:

1. Нађемо најпре збир: $1+5+9+\dots+4n-3=S_n$. Дакле, $S_n=\frac{n}{2}(1+4n-3)$

$S_n=\frac{(4n-2)\cdot n}{2}$, па је: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n(4n-2)}{4(n+1)}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n-4n^2-4n}{4n+4}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n}{4n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6}{4+\frac{4}{n}}=-\frac{3}{2}$

2. b_1, b_2, b_3 – геометр. низ; a_1, a_4, a_{16} – аритм.

$b_1=a_1=5$, $b_3=a_4$, $b_5=a_{16}$ $\Big\}$ $b_1q^2=a_1+3d$, $b_1q^4=a_1+15d$

$5q^2=5+3d \quad (-5)$
$5q^4=5+15d$ $\Big\}$ $15q^4-25q^2=-20\ /:5 \Rightarrow (q^2)^2-5q^2+4=0$, $t=q^2$

$t_{1,2}=\frac{5\pm3}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases}$ тј. $q^2=4$ или $q^2=1$.

$a_4=b_3=5\cdot q^2=20$; $\boxed{a_4=20}$ или $\boxed{a_4=5}$ $\quad b_7=b_1q^6=5\cdot4^3 \Rightarrow \boxed{b_7=320}$ $\boxed{b_7=5}$

3. Најпре напишемо број $\sqrt{3}-i$ у триг. облику

$r=2$; $\sqrt{3}=2\cos\varphi$, $-1=2\sin\varphi$ $\Rightarrow$ $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$; $\varphi\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ тј. $\varphi=-\frac{\pi}{6}$

$z=\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^{100}=2^{100}\left(\cos\left(-\frac{100\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{100\pi}{6}\right)\right)=$

$=2^{100}\left(\cos\left(-\frac{50\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{50\pi}{3}\right)\right)=2^{100}\left(\cos\left(-16\pi-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(16\pi-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$=2^{100}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2^{100}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ јер

$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}$

$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}$

$\boxed{4}$ $z^4 = -16 = 16\cdot(-1) = 16\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$

$z_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k = 0,1,2,3$

$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(1+i)$

$z_1 = 2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(-1+i)$

$z_2 = 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}(1+i)$

$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1-i)$

$\boxed{5}$ $(\sqrt{3}-i)^n + (\sqrt{3}+i)^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{6}$

$\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$r = \sqrt{3+1} = 2$ $\quad \left.\begin{array}{l}\sqrt{3} = 2\cos\varphi \\ -1 = 2\sin\varphi\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ $\varphi \in \mathrm{IV} \Rightarrow \boxed{\varphi = -\frac{\pi}{6}}$

$\sqrt{3}+i = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$r = 2$; $\quad \left.\begin{array}{l}\sqrt{3} = 2\cos\theta \\ 1 = 2\sin\theta\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{array}\right\}$ $\theta \in \mathrm{I} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$

$$L \equiv 2^n\cdot\left(\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{6}\right)\right) + 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2^n\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{6} - \cancel{i\sin\frac{n\pi}{6}} + \cos\frac{n\pi}{6} + \cancel{i\sin\frac{n\pi}{6}}\right) = 2^n\cdot 2\cdot\cos\frac{n\pi}{6} =$$

$$= 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{6} \equiv D$$

Задаци за 5:

(1) По дефиницији доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+5} = 2$

(2) Бројеви $5x-y$, $2x+3y$, $x+2y$ $(x, y \in R)$ су узастопни чланови аритметичког низа, а бројеви $(y+1)^2$, $xy+1$, $(x-1)^2$ су узастопни чланови геометријског низа. Одредити x и y.

(3) Доказати формулу: $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{2n} = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$, $\alpha\in R$, $n\in N$.

(4) Решити једначину: $z^4+8+8\sqrt{3}i=0$

(5) Одредити комплексни број $z=x+iy$ ако је $\left|\frac{z+4}{z+12}\right|=1$ и $Re\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)=-\frac{1}{2}$, а затим коришћењем Моаврове формуле одредити z^4. (Можете да користите особину комплексних бр. $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$, али у том случају доказ је обавезан!!!)

Решење

$\boxed{1}$ $a_n=\frac{2n+3}{n+5}$, $a=2$. За произвољно $\varepsilon>0$, направимо

$$|a_n-a|=\left|\frac{2n+3}{n+5}-2\right|=\left|\frac{2n+3-2n-10}{n+5}\right|=\left|-\frac{7}{n+5}\right|=\frac{7}{n+5}<\varepsilon$$

$n+5>\frac{7}{\varepsilon}$ тј. $n>\frac{7}{\varepsilon}-5$, па се за n_0 узима: $n_0=\frac{7}{\varepsilon}-5$.

Дакле, постоји такав $n_0\in N$ јер је ε унапред задат.

$\boxed{2}$ $5x-y$, $2x+3y$, $x+2y$ аритм. низ па је: $2(2x+3y)=6x+y$

$(y+1)^2$, $xy+1$, $(x-1)^2$ геом. низ: $(xy+1)^2=(y+1)^2\cdot(x-1)^2$

Решавамо систем:

$$\left.\begin{aligned} &2x=5y\\ &(xy+1)^2=(xy+x-y-1)^2\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}&2x=5y\\ &xy+1=\pm(xy+x-y-1)\end{aligned}$$

I: $2x=5y$

$\cancel{xy}+1=\cancel{xy}+x-y-1$

$2x=5y$

$x-y=2$

$x=2+y$

$4+2y=5y$

$y=\frac{4}{3}$, $x=\frac{10}{3}$

$\boxed{\left(\frac{4}{3},\frac{10}{3}\right),(0,0),\left(-\frac{3}{4},-\frac{3}{10}\right)}$

II: $2x=5y$

$xy+\cancel{1}=-xy-x+y+\cancel{1}$

$2xy=y-x$

$x=\frac{5}{2}y$

$5y^2=-\frac{3}{2}y$

$y\left(5y+\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow y_2=0 \lor y_3=-\frac{3}{10}$

$\boxed{3}$ $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{2n}=\left(2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}=$

$=\left(2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}=\left(2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}\cdot\left(\cos\frac{2n\alpha}{2}+i\sin\frac{2n\alpha}{2}\right)$

$=\left(2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}\cdot(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$; ▨

$\boxed{4}$ $z^4+8+8\sqrt{3}i=0$; $z^4=-8-8\sqrt{3}i$ Претворимо компл. број у тригонометријски облик:

$r=\sqrt{64+64\cdot 3}=16$; $\left.\begin{array}{l}-8=16\cos\varphi\\ -8\sqrt{3}=16\sin\varphi\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi=-\frac{1}{2}\\ \sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}$ $\varphi\in\text{III}\Rightarrow\boxed{\varphi=\frac{4\pi}{3}}$

$z^4=16\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$. Добијају се решења:

$z_k=\sqrt[4]{16}\cdot\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)$, $k=0,1,2,3$

$z_0=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1+i\sqrt{3}$;

$z_1=2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}+i$

$z_2=2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)\right)=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1-\sqrt{3}i$

$z_3=2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}-i$

$\boxed{5}$ За овај задатак користићемо чињеницу да је $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ за два комплексна броја $z=x+iy$, $w=a+bi$ (доказ је у прилогу)

$\left|\frac{z+4}{\bar{z}+12}\right|=\frac{|z+4|}{|\bar{z}+12|}=\frac{|x+4+iy|}{|x+12-iy|}=\frac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{(x+12)^2+y^2}}$. Из услова зад. је:

$(x+4)^2+y^2=(x+12)^2+y^2$ тј. $8x+16=24x+144$; $16x+144=16$

$x+9=1$; $\boxed{x=-8}$

$\frac{\bar{z}}{z}=\frac{x-iy}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x^2-y^2-2xy\cdot i}{x^2+y^2}$; $Re\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, по услову:

$2(x^2-y^2)=-x^2-y^2$; $3x^2=y^2$ тј. $y=\pm\sqrt{3}\cdot x$, па је:

1. $z=-8-8\sqrt{3}i$

$r=16$; $\left.\begin{array}{l}-8=16\cos\varphi\\ -8\sqrt{3}=16\sin\varphi\end{array}\right\}$ $\varphi\in\text{III}\Rightarrow\boxed{\varphi=\frac{4\pi}{3}}$

$z=16\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$z^4=16^4\cdot\left(\cos\frac{16\pi}{3}+i\sin\frac{16\pi}{3}\right)$

$=16^4\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$z^4=2^{15}(-1-\sqrt{3}i)$

2. $z'=-8+8\sqrt{3}i$

$r'=16$; $\left.\begin{array}{l}-8=16\cos\varphi'\\ 8\sqrt{3}=16\sin\varphi'\end{array}\right\}$ $\varphi'\in\text{II}\Rightarrow\boxed{\varphi'=\frac{2\pi}{3}}$

$z'=16\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$(z')^4=16^4\cdot\left(\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}\right)$

$=16^4\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$(z')^4=2^{15}(-1+\sqrt{3}i)$.

Пример: $z = x+iy \qquad w = a+bi$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|\frac{x+iy}{a+bi}\right| = \left|\frac{x+iy}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}\right| = \left|\frac{ax+by+(-bx+ay)i}{a^2+b^2}\right| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{ax+by}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-bx+ay}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2x^2 + \cancel{2abxy} + b^2y^2 + b^2x^2 - \cancel{2abxy} + a^2y^2}{(a^2+b^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2 + (a^2+b^2)y^2}{(a^2+b^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}}$$

$$\frac{|z|}{|w|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}}$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$