1) Одредити реалан параметар m тако да решење система $(m+1)x - my = 4$
$$3x - 5y = m$$
задовољава неједначину $x - y < 2$.

Решимо систем:
$$\begin{aligned}(m+1)x - my &= 4 \quad / \cdot (-5)\\ 3x - 5y &= m \quad / \cdot m\end{aligned}\quad +$$

$$\big(3m - 5(m+1)\big)x = m^2 - 20$$
$$3x - 5y = m$$

$$x = \frac{m^2-20}{-2m-5} = \frac{20-m^2}{2m+5}$$
$$5y = 3\cdot\frac{20-m^2}{2m+5} - m = \frac{60-5m^2-5m}{2m+5}$$

$$x = \frac{20-m^2}{2m+5}\ ,\quad y = \frac{12-m^2-m}{2m+5}\ ;$$

$2m+5 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{5}{2}$

Неједначина:

$x - y < 2$ даје:

$$\frac{20-m^2}{2m+5} - \frac{12-m^2-m}{2m+5} < 2$$

$$\frac{20-m^2-12+m^2+m}{2m+5} < 2\ ;\quad \frac{m+8}{2m+5} - 2 < 0$$

$$\frac{8+m-4m-10}{2m+5} < 0\ ;\quad \frac{-2-3m}{2m+5} < 0 \iff \frac{3m+2}{2m+5} > 0$$

	$-\frac{5}{2}$		$-\frac{2}{3}$	
$3m+2$	$-\ -$	$-\ -\ -$		$+\ +\ +$
$2m+5$	$-\ -$	$+\ +$		$+\ +$
	$+$	$-$		$+$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

2) Збир три броја је 80. Ако се први подели другим, добије се количник 3 и остатак 3; а ако се трећи подели првим добије се исти количник и остатак. Одредити бројеве.

(Треба вас подсетити!) a - дељеник, b - делилац, q - количник, r - остатак, онда:

$$\boxed{a = b\cdot q + r}$$

$x + y + z = 80$
$x = 3\cdot y + 3$
$z = 3x + 3$

$x = 3y + 3$
$3y + 3 + y + z = 80$
$z = 9y + 9 + 3$

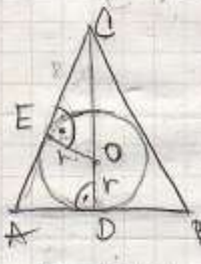
$x = 3y + 3$
$\left.\begin{array}{l} 4y + z = 77 \\ 9y - z = -12 \end{array}\right) +$

$x = 3y + 3$
$4y + z = 77$
$13y = 65$

$y = 5$
$x = 15 + 3$
$20 + z = 77$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 5 \\ x = 18 \\ z = 57 \end{array}}$$

3) Крак једнакокраког троугла је 13 cm, а висина која одговара основици је 12 cm. Одредити полупречник уписане кружнице.



Краци су тангенте на кружницу, па је $\sphericalangle CEO = 90^\circ = \sphericalangle ADC$ (подножје висине)

$\sphericalangle OCE = \sphericalangle DCA$ (заједнички за 2 троугла), па је $\triangle ADC \sim \triangle OEC$ (правоугли са заједничким углом)

Биће: $\frac{AC}{OC} = \frac{AD}{OE} = \frac{CD}{EC}$ тј. $\frac{13}{12-r} = \frac{AD}{r}$

$AD^2 = AC^2 - CD^2 = 169 - 144 = 25$; $\boxed{AD = 5}$ $AD = 5$

$13r = 5(12 - r)$
$13r + 5r = 60$
$18r = 60 \Rightarrow \boxed{r = \frac{10}{3}\,cm}$

4) Одреди остале елементе правоуглог троугла, ако је један одсечак висине на хипотенузи $q = 144\,cm$, а тежишна дуж која одговара хипотенузи је $t_c = 84{,}5\,cm$.

$\boxed{t_c = \frac{c}{2}} \Rightarrow c = 169\,cm, \qquad p = c - q = 169 - 144 = 25\,cm.$

$b^2 = c \cdot q = 169 \cdot 144 \qquad a^2 = c \cdot p = 169 \cdot 25$

$b = 13 \cdot 12 = 156\,cm \qquad a = 13 \cdot 5 = 65\,cm$

$h^2 = p \cdot q = 144 \cdot 25$ тј. $h = 12 \cdot 5 = 60\,cm.$

5) Ако је $ctg\,\alpha = \frac{4}{3}$ и $\alpha < 90^\circ$, одреди остале тригонометријске ф-је:

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{3}\sin\alpha$ тј. $\cos^2\alpha = \frac{16}{9}\sin^2\alpha$

Из основног тригонометријског идентитета је:

$$\left.\begin{array}{l} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \cos^2\alpha = \frac{16}{9}\sin^2\alpha \end{array}\right\} \sin^2\alpha + \frac{16}{9}\sin^2\alpha = 1 \quad / \cdot 9$$

$25\sin^2\alpha = 9$ тј. $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}, \quad tg\,\alpha = \frac{3}{4}$

6) Доказати идентитет: $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{2 + 2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2\cancel{(1+\cos\alpha)}}{\sin\alpha\cancel{(1+\cos\alpha)}} = \frac{2}{\sin\alpha} \quad \blacksquare$$