Биномни коефицијенти – обрада

Дефиниција Биномни коефицијент, у ознаци $\binom{n}{k}$ (читамо: n над k), где $k, n \in N$, $1 \le k \le n$, називамо број:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

По дефиницији је $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ и $\binom{n}{1} = n$.

Дакле, $\binom{n}{k} = C_k^n$.

Основне особине биномних коефицијената дате су теоремом:

Теорема 1 За биномне коефицијенте важи:

а) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

б) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

в) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

доказ: (а) за $k=0$ и $k=n$ је тривијално. За $1 \le k \le n$ је:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

(б) $\binom{n}{k} \overset{(a)}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$ і $\binom{n}{n-k} \overset{(a)}{=} \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

тј. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(в) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} =$

$$= \frac{n!}{k!(n-(k+1))!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n!}{k!(n-(k+1))!}\cdot\frac{n+1}{(n-k)(k+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

За одређивање биномних коефицијената може послужити и Паскалов троугао: крајњи бројеви су 1, а сваки следећи је збир два суседна лево и десно од њега из претходне врсте. Бројеви са леве стране су степен бинома који се рачуна (то у следећој лекцији), а бројеви десно су биномни коефицијенти који се у том развоју појављују:

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
⋮	

Пример: $\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3\cdot 2}}=56$; $\binom{n}{3}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Пример $\binom{8}{6}=\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}}{\cancel{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}=28$

$\binom{8}{8-6}=\binom{8}{2}=\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=4\cdot 7=28$

$\Bigg\}\ \binom{8}{6}=\binom{8}{2}$ (теорема 1 под Б)