

① Решить нелинейное:

$$(I) \frac{3}{x} + \frac{x}{3} \geq \frac{3(x+3)^2 - x(9+2x^2)}{3x^2+9x}$$

$$\frac{9+x^2}{3x} - \frac{3x^2+18x+27-9x-2x^3}{3x(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{9x+27+x^3+3x^2+2x^3-3x^2-9x-2x^3}{3x(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{3x^3+27}{3x(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{x^2}{x+3} \geq 0, \quad x \neq 0$$

$$x+3 \geq 0 \quad x \in [-3, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$(II) \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \leq \frac{x^2-2}{x^2+x}$$

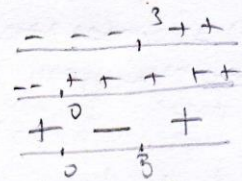
$$\frac{2x+1}{x(x+1)} - \frac{x^2-2}{x(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{-x^2+2x+3}{x(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x(x+1)} \geq 0 \quad \vee \quad \frac{x^2-3x+x-3}{x(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x(x+1)} \geq 0, \quad x \neq -1$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$$



② Решить систему:

$$\begin{cases} x+2y+3z = 7 \\ y-x+3 = 5 \\ 2y-2x+6 = 5y+10z+15x \\ 3y-3x+9 = 10x+15y+5z \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \frac{y-x+3}{5} \quad \frac{x+2y+3z}{7} \quad / \cdot 35 \\ \frac{y-x+3}{5} \quad \frac{y+2z+3x}{2} \quad / \cdot 10 \\ \frac{y-x+3}{5} = \frac{2x+3y+z}{3} \quad / \cdot 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7y-7x+21 = 5x+10z+15z \\ 2y-2x+6 = 5y+10z+15x \\ 3y-3x+9 = 10x+15y+5z \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -12x-3y-15z = -21 \quad /: -3 \quad /: (-\frac{2}{3}) \\ -17x-3y-10z = -6 \\ -13x-12y-5z = -9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -9x-y = 8 \\ -9x-11y = -2 \quad /: (-1) \\ 4x+y+5z = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10y = 10 \Rightarrow y = 1 \\ -9x = 9 \Rightarrow x = -1 \\ 5z = 10 \Rightarrow z = 2 \end{array}$$

$$(x, y, z) = (-1, 1, 2)$$

$$\begin{cases} x+y+z = 5 \\ x-z+3 = 4 \\ 2x+y+z = 9 \\ z-8+5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \frac{z-y+5}{2} = \frac{x+y+z}{5} \quad / \cdot 10 \\ \frac{z-y+5}{2} = \frac{x-z+3}{4} \quad / \cdot 4 \\ \frac{z-y+5}{2} = \frac{2x+y+z-9}{3} \quad / \cdot 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5z-5y+25 = 2x+2y+4 \\ 2z-2y+10 = x-z+3 \\ 3z-3y+15 = 4x+2y+2z-18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x+7y-5z = 21 \\ x+2y-3z = 7 \quad /: (-2) \quad /: (-4) \\ 4x+5y-z = 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3y+z = 7 \\ -3y+11z = 5 \\ x+2y-3z = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12z = 12 \Rightarrow z = 1 \\ 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \\ x = 7-4+3 \Rightarrow x = 6 \end{array}$$

$$(x, y, z) = (6, 2, 1)$$

3) Два радника могу да заврше неки посао за 8 часова. Први радник је радио 6 часова, а други 9 часова и тако урадио $\frac{51}{56}$ део посла. За колико часова сваки од њих може да заврши посао?

1. радник: x часова, 2. радник: y часова

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{8} \\ \frac{6}{x} + \frac{9}{y} &= \frac{51}{56} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} t = \frac{1}{x}, p = \frac{1}{y} \\ t + p &= \frac{1}{8} \\ 2t + 3p &= \frac{17}{56} \end{aligned} \left. \begin{aligned} t = \frac{1}{x}, p = \frac{1}{y} \\ p &= \frac{17}{56} - \frac{1}{8} \\ t + p &= \frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p &= \frac{3}{56} \Rightarrow y = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3} \text{ h} \\ t &= \frac{21}{56} - \frac{17}{56} \Rightarrow x = 14 \text{ h} \end{aligned}$$

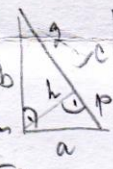
Дакле, 1. радник заврши посао за 14 сати, а 2. радник за 18 $\frac{2}{3}$ сати.

11) Ако ради заједно, два радника заврше посао за 12 дана. Ако прво ради један радник 9 дана, а затим други 6 дана заврше $\frac{2}{3}$ посла. За колико дана би овај посао урадио сваки радник појединачно?

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{12} \\ \frac{9}{x} + \frac{6}{y} &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} t + p &= \frac{1}{12} \\ 9t + 6p &= \frac{2}{3} \\ t = \frac{1}{x}, p &= \frac{1}{y} \end{aligned} \left. \begin{aligned} 3t &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \\ t + p &= \frac{1}{12} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} t &= \frac{1}{18} \Rightarrow x = 18 \text{ дана} \\ p &= \frac{1}{12} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36} \Rightarrow y = 36 \text{ дана} \end{aligned}$$

4) У правоуглом троуглу одредити остале елементе ако је:

(I) $a=130 \text{ cm}, b=312 \text{ cm}$



$$c^2 = 130^2 + 312^2 = 13 \cdot 10^2 + 13 \cdot 24^2 = 13 \cdot 26^2 \Rightarrow c = 2 \cdot 169 = 338 \text{ cm}$$

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{130^2}{2 \cdot 169} = \frac{13 \cdot 10^2}{2 \cdot 13^2} = 50 \text{ cm}$$

$$q = \frac{b^2}{c} = \frac{312^2}{2 \cdot 169} = \frac{13 \cdot 24^2}{2 \cdot 13^2} = 288 \text{ cm}$$

$$h^2 = p \cdot q = 50 \cdot 288 \Rightarrow h^2 = 25 \cdot 576$$

$$h = 5 \cdot 24 = 120 \text{ cm}$$

(II) $a=136 \text{ cm}, h=120 \text{ cm}$

$$p^2 = a^2 - h^2 = (136-120)(136+120) = 16 \cdot 256$$

$$p = 4 \cdot 16 = 64 \text{ cm}$$

$$q = \frac{h^2}{p} = \frac{120^2}{8^2} = 15^2 = 225 \text{ cm}$$

$$c = p + q = 225 + 64 = 289 \text{ cm}$$

$$b^2 = c \cdot q = 289 \cdot 225$$

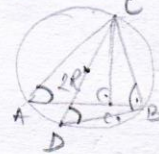
$$b = 17 \cdot 15 = 255 \text{ cm}$$

5) (I) У $\triangle ABC$ је: $AC=30 \text{ cm}, BC=24 \text{ cm}$, висина $CC_1=20 \text{ cm}$. Одредити полупрецини описаног круга био Δ .

$\angle C_1BD=90^\circ$ (периферицини над пречником)

$\angle C_1CA_1 = \angle C_1DB$ (—||— истим луком BC)

$\triangle CC_1A_1 \sim \triangle C_1BD$ (правоугли са једнаким оштрим углом)

$$\Rightarrow \frac{2R}{AC} = \frac{BC}{CC_1} \Rightarrow \frac{2R}{30} = \frac{24}{20} \Rightarrow R = 18 \text{ cm}$$


(II) У кружници полупречника 32,5 cm уписан је $\triangle ABC$ странца $AC=60 \text{ cm}, BC=52 \text{ cm}$. Одредити тангентну CH .

(Пример аналоган као у примеру I! Реш.: $CH=48 \text{ cm}$)