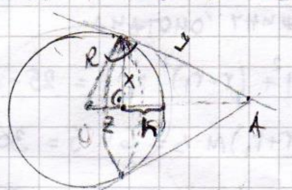
① Израчунати део површине лопте полупречника $R = 4cm$ који се види из тачке A, ако је растојање тачке A од центра лопте $d = 8cm$.



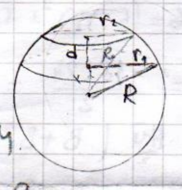
$y^2 = d^2 - R^2 = 8^2 - 4^2 = 4 \cdot 12 = 16 \cdot 3$; $y = 4\sqrt{3}$ cm

$P_\Delta = \frac{R \cdot y}{2} = \frac{d \cdot x}{2}$ тј. $4 \cdot 4\sqrt{3} = 8 \cdot x$; $x = 2\sqrt{3}$ cm

$z^2 = R^2 - x^2 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow z = 2cm$. Даље, $h = R - z = 2cm$

Површина која се види је површина калоте: $P = 2R\pi \cdot h = 16\pi cm^2$.

② I Са исте стране центра лопте постављене су две паралелне равни на међусобном растојању од 3cm. Равни секу лопту по круговима чији су полупречници 9cm и 12cm. Наћи P и V лопте.



$r_1 = 12$, $r_2 = 9cm$, $d = 3cm$.

Са слике је: $\left.\begin{array}{l}(d+x)^2 + r_2^2 = R^2 \\ x^2 + r_1^2 = R^2\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}(3+x)^2 + 81 = R^2 \\ x^2 + 144 = R^2\end{array}\right\}$ $9 + 6x + \cancel{x^2} + 81 = \cancel{x^2} + 144$

$6x = 54$ тј. $x = 9$ cm

$R^2 = 81 + 144 = 225$ $R = 15cm$

$P = 4R^2\pi = 4 \cdot 225\pi = 900\pi\ cm^2$; $V = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \cancel{15}^{5} \cdot 225\pi = 4500\pi\ cm^3$

(II) Са исте стране центра лопте постављене су две паралелне равни на међусобном растојању 9cm. Равни секу лопту по круговима чије су површине $400\pi cm^2$ и $49\pi cm^2$. Одредити P и V лопте.

(Слика је иста као и за супротну групу)

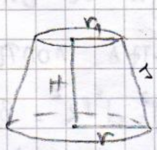
$r_1^2\pi = 400\pi \Rightarrow r_1 = 20cm$, $d = 9cm$ $\left.\begin{array}{l}(9+x)^2 + 7^2 = R^2 \\ x^2 + 20^2 = R^2\end{array}\right\}$ $81 + 18x + \cancel{x^2} + 49 = \cancel{x^2} + 400$

$r_2^2\pi = 49\pi \Rightarrow r_2 = 7cm$ $18x = 270 \Rightarrow x = 15cm$

$R^2 = 225 + 400 = 625$; $R = 25cm$

$P = 4 \cdot 625\pi = 2500\pi\ cm^2$ $V = \frac{4}{3} 25 \cdot 625\pi = \frac{62500}{3}\pi\ cm^3$.

(3) (I) Изводница зарубљене купе је 5 cm, а полупречници основа су 5 cm и 1 cm. Израчунати P и V ваљка који са њом има једнаку висину и површину омотача.



$s^2 = H^2 + (r-r_1)^2$; $H^2 = 25 - 16 = 9$; $\boxed{H = 3\,cm}$ $\quad H = H_v$

$M = (r+r_1)\pi \cdot s = 6\pi \cdot 5 = 30\pi\ cm^2$; $M_k = M_v = 2 r_v \pi \cdot H_v$

$30\pi = 2 \cdot r_v \pi \cdot 3$; $r_v = 5\ cm$; $\quad V = r_v^2 \pi \cdot H_v = 25\pi \cdot 3 = 75\pi\ cm^3$

$P = 2B + M = 2\cdot 25\pi + 30\pi = 80\pi\ cm^2$

(II) Зарубљена купа има површину $216\pi\ dm^2$, разлику полупречника од 5 dm и изводницу од 13 dm. Одредити њену запремину.

(слика је иста као за претходну групу)

$r - r_1 = 5$, $s = 13$, $P = 216\pi$ $\quad P = \pi\left(r^2 + r_1^2 + (r+r_1)s\right) \ \wedge \ r = 5 + r_1$

$216 = (5+r_1)^2 + r_1^2 + (5+2r_1)\cdot 13$. Сређивањем: $r_1^2 + 18r_1 - 63 = 0$

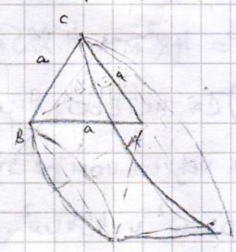
$r_1 = \frac{-18 \pm 24}{2} = 3\ dm$; $\quad r = 8\ dm$. $\quad H^2 = s^2 - (r-r_1)^2 = 169 - 25 = 144$; $\underline{H = 12\ dm}$

$V = \frac{H\pi}{3}\left(B + B_1 + \sqrt{BB_1}\right) = 4\pi(64 + 9 + 8\cdot 3) = 4\pi\, 97 = 388\pi\ dm^3$

(4) (I) Једнакостранични троугао странице a ротира око праве која садржи теме A и паралелна је висини која садржи теме B. Наћи V ротационог тела.

$V = V_{zk} - V_k = \frac{H}{3}\pi\left(a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a\cdot\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) =$ $\quad H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\left(a^2 + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a\sqrt{3}\pi}{2\cancel{6}}\cdot\frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}\pi}{4}$



(II) Једнакостранични Δ странице a ротира око праве која садржи једно његово теме и паралелна је наспрамној ивици. Наћи V тела.

$V = V_v - 2\cdot V_k = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\pi\cdot a - 2\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\pi\cdot\frac{a}{2} =$

$= \frac{3a^3\pi}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{a^3\cdot 3\pi}{4} = \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\pi\cdot a^3}{\cancel{4}\ 2} = \frac{a^3\pi}{2}$