Други писмени задатак – IE2 – 2018/2019

① Из скупа функција $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in R$ испитати промене и скицирати график оне која задовољава услове:

(I): садржи тачке $A(3,-7)$ и $B(-2,8)$, а нула јој је за $x=2$.

(II) садржи тачке $M(4,-3)$ и $N(6,5)$, а нула је за $x=5$

(I)
$$\begin{aligned} 9a+3b+c&=-7\\ 4a-2b+c&=8 \quad /\cdot(-1)\\ 4a+2b+c&=0 \end{aligned}$$

$4b=-8 \Rightarrow b=-2$

$$\left.\begin{aligned} 4a+c&=4\\ 9a+c&=-1 \end{aligned}\right\}\ 5a=-5 \Rightarrow a=-1,\quad c=8$$

$f(x)=-x^2-2x+8$

1) $D_f=R$

2) $y=0$: $x_{1,2}=\dfrac{2\pm 6}{-2}=\begin{cases}-4\\ 2\end{cases}$

3) $x=0$: $y=8$

4) $\alpha=\dfrac{2}{-2}=-1$; $\beta=\dfrac{-36}{-4}=9$

$T(-1,9)$

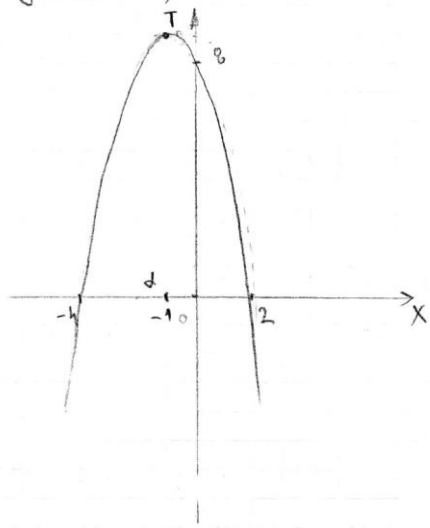
5) $y>0$: $x\in(-4,2)$

$y<0$: $x\in(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$

6) $y\nearrow$: $x\in(-\infty,-1)$; $y\searrow$: $x\in(-1,+\infty)$

$y_{max}(-1)=9$

7)



(II)
$$\begin{aligned} 16a+4b+c&=-3 \quad (-1)\\ 36a+6b+c&=5\\ 25a+5b+c&=0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 20a+2b&=8 \quad /\cdot(-2)\\ 9a+b&=3 \end{aligned}\right\}\ -a=-1,\quad \boxed{a=1}$$

$\boxed{b=-6}$; $\boxed{c=5}$

$f(x)=x^2-6x+5$

1) $D_f=R$

2) $y=0$: $x_{1,2}=\dfrac{6\pm 4}{2}=\begin{cases}5\\ 1\end{cases}$

3) $x=0$: $y=5$

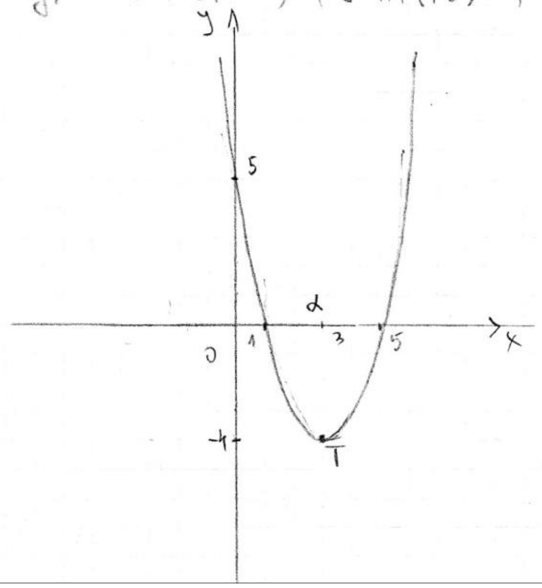
4) $\alpha=+3$ $\beta=-4$ $T(+3,-4)$

5) $y>0$: $x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$

$y<0$: $x\in(1,5)$

6) $y\searrow$: $x\in(-\infty,+3)$

$y\nearrow$: $x\in(+3,+\infty)$, $y_{min}(+3)=-4$



(2) Не решавајући дату квадратну једначину, израчунати вредност датих израза:

(I) ј-на: $4x^2-13x+3=0$

Израз: $4x_1^3+5x_1^2x_2+5x_1x_2^2+4x_2^3=$

$=4(x_1^3+x_2^3)+5x_1x_2(x_1+x_2)=$

$=4(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)+5x_1x_2(x_1+x_2)=$

$=(x_1+x_2)(4x_1^2+x_1x_2+4x_2^2)=$

$=(x_1+x_2)(4(x_1+x_2)^2-7x_1x_2)=$

$=\frac{13}{4}\left(4\cdot\frac{169}{16}-7\cdot\frac{3}{4}\right)=$

$=\frac{13}{4}\cdot\frac{148}{4}=\frac{13\cdot 37}{4}=\frac{481}{4}=120{,}25$

јер је: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{13}{4}$, $x_1\cdot x_2=\frac{3}{4}$

(II) ј-на: $2x^2-3x+5=0$

Израз: $2x_1^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2+2x_2^3=$

$=2(x_1^3+x_2^3)-3x_1x_2(x_1+x_2)=$

$=2(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)-3x_1x_2(x_1+x_2)=$

$=(x_1+x_2)(2(x_1^2+x_2^2)-5x_1x_2)=$

$=(x_1+x_2)(2(x_1+x_2)^2-9x_1x_2)=$

$=\frac{3}{2}\left(2\cdot\frac{9}{4}-9\cdot\frac{5}{2}\right)=$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot(1-5)=-\frac{3\cdot 9\cdot 4}{4}=-27.$

јер је $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$, $x_1\cdot x_2=\frac{5}{2}$

(3) Решити квадратну неједначину:

(I) $\frac{x^2-5x}{x^2-2x-3}\le 2$

$\frac{x^2-5x-2x^2+4x+6}{x^2-2x-3}\le 0$

$\frac{-x^2-x+6}{x^2-2x-3}\le 0$

	-3		-1		2		3	
$-x^2-x+6$	−		+		+		−	−
x^2-2x-3	+		+		−		−	+
$\frac{-x^2-x+6}{x^2-2x-3}$	−		+		−		+	−

$x_{1,2}=\frac{1\pm 5}{-2}=\begin{cases}-3\\2\end{cases}$, $x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

$x\in(-\infty,-3]\cup(0,2]\cup(3,+\infty)$

(II) $\frac{9x-11}{x^2-5x+6}\ge -1$

$\frac{x^2-5x+6+9x-11}{x^2-5x+6}\ge 0$

$\frac{x^2+4x-5}{x^2-5x+6}\ge 0$

	-5		1		2		3	
x^2+4x-5	+		−		+		+	+
x^2-5x+6	+		+		+		−	+
$\frac{x^2+4x-5}{x^2-5x+6}$	+		−		+		−	+

$x_{1,2}=\frac{-4\pm 6}{2}=\begin{cases}1\\-5\end{cases}$ $x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$

$x\in(-\infty,-5]\cup[1,2)\cup(3,+\infty)$

(4) У зависности од параметра дискутовати природу решења једначине:

$(m+1)x^2+2(m-1)x+4m+1=0$

$m\neq -1$: $D=4(m^2-2m+1-4m^2-m-4m-1)=$

$=4(-3m^2-7m)=4m(-3m-7)$

D: $- - -$ $\;-\frac{7}{3}\;$ $+ + +$ $\;0\;$ $- - -$

$\boxed{D=0\ (\text{РЈР})}$: $m=0 \vee m=-\frac{7}{3}$

$\boxed{D>0\ (\text{РРР})}$: $m\in(-7/3,-1)\cup(-1,0)$

$\boxed{D<0\ (\text{ККР})}$: $m\in(-\infty,-\frac{7}{3})\cup(0,+\infty)$

$(2m-1)x^2+(m+2)x+m-1=0$

$2m-1\neq 0$: $D=m^2+4m+4-8m^2+12m-4=$

$m\neq\frac{1}{2}$ $\quad = m(-7m+16)$

$- - -$ $\;0\;$ $+ + +$ $\;1/2\;$ $\;16/7\;$ $- - -$

$\boxed{D=0\ (\text{РЈР})}$: $m=0$, $m=\frac{16}{7}$

$\boxed{D>0\ (\text{РРР})}$ $m\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},\frac{16}{7})$

$\boxed{D<0\ (\text{ККР})}$ $m\in(-\infty,0)\cup(\frac{16}{7},+\infty)$

5) (I) Збир цифара једног двоцифреног броја је 8, а производ тог броја и броја написаног истим цифрама, а обрнутим редоследом је 1855. Који је то број?

$10x+y$ - двоцифрен број

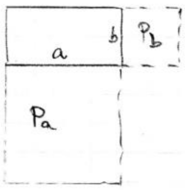
$$\left.\begin{aligned} x+y&=8\\ (10x+y)\cdot(x+10y)&=1855 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y&=8-x\\ (9x+8)(-9x+80)&=1855 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y&=8-x\\ -81x^2+648x-1215&=0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y&=8-x\\ -9x^2+72x-135&=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y&=8-x\\ -x^2+8x-15&=0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} y&=8-x\\ x_{1,2}&=\frac{-8\pm 2}{-2}=\begin{matrix}3\\5\end{matrix} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x=3:\ y=5 \quad &\text{бр. је } 35\\ x=5:\ y=3 \quad &\text{бр је } 53 \end{aligned}$$

(II) Збир површина квадрата конструисаних над двема суседним страницама правоугаоника је $74\,m^2$, а збир обима тих квадрата је $48\,m$. Одредити странице тог правоугаоника.

$P_a+P_b=74\,m^2$, $O_a+O_b=48\,m$



$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2&=74\\ 4a+4b&=48 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a^2+b^2&=74\\ a+b&=12 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a&=12-b\\ (12-b)^2+b^2&=74 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} a&=12-b\\ 144-24b+b^2+b^2&=74 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a&=12-b\\ 2b^2-24b+70&=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a&=12-b\\ b^2-12b+35&=0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} a&=12-b\\ b_{1,2}&=\frac{12\pm 2}{2}=\begin{matrix}7\\5\end{matrix} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} b=7:&\quad a=5\\ b=5:&\quad a=7 \end{aligned}$$

Дакле, странице правоугаоника су 5 и 7.