

Stepenovanje prirodnim brojem

Definicija:

Neka je x realan broj, tada uvodimo oznake

$$x^1 = x$$

$$x^2 = x \cdot x$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

nastavljajući postupak, za svaki prirodan broj n , dobijamo

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-puta}}$$

Primer:

1. Izračunati

(a) $(-2)^2$

(b) $(-2)^3$

(c) $(-2)^4$

(d) $(-2)^5$

(e) $(-2)^6$

(f) -2^3

(g) -2^4

Teorema:

Za svako $x, y \in R$ i svaki prirodan broj n važi:

(a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

(b) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $m > n$

(c) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

(d) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

(e) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$, $y \neq 0$

Primeri:2. Uprostiti izraz ($x \neq 0$)

(a) $(x^5 \cdot x^2) : (x^4 : x^3)$

(b) $\frac{x \cdot (x^7 : x^6) \cdot x^3}{x^2 \cdot x^2}$

(c) $\frac{(x^{33} : x^{11}) \cdot x^2}{(x^{17} : (x^2 \cdot x^{14})) \cdot x^{20}}$

rešenje: (a) x^6 , (b) x , (c) x^3

3. Uprostiti izraz

(a) $(2a^2b^3)^3 \cdot (4ab)^3 : (16a^4b^4)^2$

(b) $\left(\frac{x^2y^3}{(x^2y^3)^2}\right)^3 : \left(\frac{x^5y}{(x^3y^2)^3}\right)^2$

(c) $\frac{(8a^2b^3)^2(4a^3b^2)^3}{(4ab^2)^4} : \frac{128a^2b(4ab^2)^2}{(16ab)^2}$

rešenje: (a) $2ab^4$, (b) x^2y , (c) $2a^7b$

4. Izračunati:

(a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2$

(b) $\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

(c) $-2^3 - (-2)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2$

rešenje: (a) $-\frac{1}{16}$, (b) $\frac{14}{27}$, (c) $-\frac{16}{27}$

5. Izračunati:

(a) $\frac{(27^2 \cdot 3)^5 \cdot 9^3}{(81^3 \cdot 37)^2}$

(b) $(128^2 \cdot 16^3)^3 \cdot 2^5 : (8^4 \cdot 4^4)^4$

(c) $\frac{3 \cdot 2^{15} \cdot 16^2 - 5 \cdot 2^2 \cdot (2^{10})^2}{(-4)^7 \cdot 2^8}$

(d) $\frac{4^{13} - 4^{12} - 6 \cdot 4^{10}}{2^{19} + 2^{17} + 2^{15}}$

rešenje: (a) 27, (b) 8, (c) -1, (d) 64

Stepenovanje celim brojem

Teorema:

Neka je $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$(a) x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(b) \left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n, y \neq 0, x \neq 0$$

$$(c) x^0 = 1$$

Primeri:

1. Izračunati:

$$(a) 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$$

$$(b) \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 2^{-2} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$(c) (-3)^{-2} - (-3)^{-1} + 3^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$(d) \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{-1}$$

$$(e) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^{-2} - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$(f) \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - 3^0 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{-2} - \left(-\frac{2}{5}\right)^0$$

rešenje: (a) $\frac{7}{8}$, (b) $-\frac{5}{2}$, (c) $-\frac{4}{9}$, (d) $\frac{4}{7}$ (e) 39, (f) $-\frac{35}{36}$

2. Uprostiti izraz

$$(a) (b^{-1} a - a^{-1} b)(a^{-1} - b^{-1})^{-1}, a, b \neq 0, a \neq b$$

$$(b) (x + y)^{-1} (x^{-1} + y^{-1}), x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$$

rešenje: (a) $-a - b$, (b) $\frac{1}{xy}$

3. Uprostiti izraz

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1} : \frac{ab}{a^3 + b^3} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1} \cdot (a - b)$$

rešenje: $(a - b)^2$

Korenovanje

Definicija:

Ako je n prirodan broj i a realan broj, tada se n -ti koren realnog broja a (oznaka $\sqrt[n]{a}$) definiše na sledeći način:

- (1) Ako je n neparan broj, tada je $\sqrt[n]{a}$ jednak realnom broju b , takvom da je $b^n = a$
- (2) Ako je n paran broj, tada je $\sqrt[n]{a}$ jednak realnom broju $b \geq 0$ takvom da je $b^n = a$

Takvi brojevi b postoje i jedinstveni su, n nazivamo izložilac korena, a potkorena veličina, b vrednost korena.

Primeri:

1. Izračunati

- (a) $\sqrt{9}$
- (b) $\sqrt[3]{8}$
- (c) $\sqrt[3]{-8}$
- (d) $\sqrt{-4}$
- (e) $\sqrt[4]{81}$

Teorema:

Za sve vrednosti a za koje izraz $\sqrt[n]{a}$ ima smisla važi: $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Primeri:

2. Izračunati:

- (a) $(\sqrt{2})^2$
- (b) $(\sqrt{-3})^2$
- (c) $(\sqrt[3]{5})^3$
- (d) $(\sqrt[5]{-6})^5$

Teorema:

Ako je $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tada važi:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \\ |a|, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \end{cases}$$

Primeri:

3. Izračunati:

(a) $\sqrt{3^2}$

(b) $\sqrt{(-3)^2}$

(c) $\sqrt[4]{2^4}$

(d) $\sqrt[6]{(-3)^6}$

(e) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$

(f) $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2}$

(g) $\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$

(h) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} - \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}$

rešenje: (a) 3, (b) 3, (c) 4, (d) 3, (e) $\sqrt{2} - 1$, (f) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$, (g) 2, (h) -3**Teorema:**Neka je $a, b \geq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ tada važi:

(a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

(b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$

(c) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(d) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

(e) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^m}$

Primeri:

4. Izračunati:

(a) $\sqrt{121 \cdot 256}$

(b) $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125}$

(c) $\sqrt[3]{8 \cdot (-27) \cdot (-64)}$

(d) $\sqrt{\frac{4}{169}}$

(e) $\sqrt[3]{2 + \frac{10}{27}}$

(f) $\sqrt[5]{(-1) \cdot 3^5 \cdot (-32)}$

(g) $\sqrt[3]{\frac{-27 \cdot 125}{20^3}}$

rešenje: (a) 176, (b) 30, (c) 24, (d) $\frac{2}{13}$, (e) $\frac{4}{3}$, (f) 6, (g) $-\frac{3}{4}$

5. Izračunati

$$\frac{\sqrt{(-7)^2} - \sqrt{-(-1)^3}}{\sqrt[3]{2^3} - \sqrt[3]{(-2)^3}}$$

rešenje: $\frac{3}{2}$

6. Izračunati:

(a) $\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{72}$

(b) $2\sqrt{75} - 3\sqrt{48} + 5\sqrt{125} - 2\sqrt{3}$

(c) $(2\sqrt{90} - 5\sqrt{160} + 3\sqrt{250})\sqrt{2}$

(d) $(\sqrt{60} - 2\sqrt{135} + 10\sqrt{15}) : (2\sqrt{5})$

(e) $5\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{108}$

rešenje: (a) $-3\sqrt{2}$, (b) $-4\sqrt{3} + 25\sqrt{5}$, (c) $2\sqrt{5}$, (d) $3\sqrt{3}$, (e) $6\sqrt[3]{4}$

7. Uprostiti izraz:

(a) $(\sqrt{5} + 1)(3\sqrt{5} - 1) - 6(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$

(b) $(3 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) - (3\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

(c) $(2 - \sqrt{3})^2(1 - 2\sqrt{3})$

(d) $(\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 3\sqrt{50})^2$

(e) $(\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}})^2$

(f) $\left(\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \right)^2$

rešenje: (a) $2(-2 + \sqrt{5})$, (b) $-2\sqrt{3}$, (c) $31 - 18\sqrt{3}$, (d) 32, (e) 4, (f) 5

8. Uprostiti izraz

$$(a) \sqrt[3]{64a^4} - 3a\sqrt[3]{8a} + 3\sqrt[3]{125a^4}, a > 0$$

$$(b) \frac{2}{x}\sqrt{x^3} + 5x\sqrt{\frac{1}{x}}, x > 0$$

$$(c) \sqrt[3]{ab^4} - \frac{1}{b}\sqrt[3]{8ab^7} + \frac{b}{a}\sqrt[3]{343a^4b}, a, b > 0$$

rešenje: (a) $13a\sqrt[3]{a}$, (b) $7\sqrt{x}$, (c) $6b\sqrt[3]{ab}$

9. Izračunati

$$(a) \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

$$(b) \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{12-6\sqrt{3}}$$

$$(c) \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} + \sqrt{2}$$

$$(d) \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} - 2$$

rešenje: (a) 4, (b) 2, (c) 1, (d) $\sqrt{3}$

10. Uprostiti izraz:

$$(a) \sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} - 2\sqrt[6]{\sqrt{x}} + \sqrt[24]{x^2} - 3\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}, x > 0$$

$$(b) \sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^3}}} - \sqrt[5]{\sqrt{x}} + \sqrt{\sqrt[5]{x}}, x > 0$$

$$(c) \sqrt{\sqrt[4]{x^3}} : \sqrt[5]{\sqrt[4]{x^{-1}}} : \sqrt[5]{\sqrt{x}}, x > 0$$

$$(d) \sqrt{\sqrt{x^3}} \sqrt[3]{\sqrt{x}} : \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5}}, x > 0$$

rešenje: (a) $-3\sqrt[12]{x}$, (b) $\sqrt[10]{x}$, (c) $\sqrt[40]{x^{13}}$, (d) \sqrt{x}

Stepen sa racionalnim izlozicem

Definicija:

Neka je $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Primeri:

1. Izračunati

$$(a) 4^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{1}{3}}$$

$$(b) 25^{-\frac{1}{2}} + 8^{\frac{2}{3}}$$

$$(c) 27^{-\frac{1}{3}} - 4 \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

rešenje: (a) 0, (b) $\frac{21}{5}$, (c) $-\frac{83}{3}$

2. Izračunati

$$(a) \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + (0.5)^{-1} \cdot \frac{1}{0.125} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(b) \left(\left(1 + \frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1}$$

$$(c) \left(\left(\frac{1}{4} + 6\right)^{\frac{1}{2}} : 2^{-1} + \frac{5}{\sqrt{(-4)^2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{(-3)^3} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} \right)$$

$$(d) \left(\frac{1}{4} : \left(1 + \frac{7}{9}\right) + 0.25 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{1}{5} - 1\right)^2} + \left(\frac{20}{9}\right)^{-1} \right)$$

Racionalisanje imenioca razlomka

Definicija:

Racionalisati imenilac razlomka znači transformisati ga u identički jednak razlomak u čijem imeniocu ne učestvuju iracionalni brojevi.

Primeri:

1. Racionalisati imenioce sledećih razlomaka

$$(a) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(b) \frac{2}{5\sqrt{3}}$$

$$(c) \frac{2}{\sqrt{2}-1}$$

$$(d) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$(e) \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

$$(f) \frac{4}{\sqrt[3]{2}-1}$$

$$(g) \frac{2}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$$

$$(h) \frac{1+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

rešenje: (h) $\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{6}$

2. Izračunati

$$(a) \left(\frac{1}{1+\sqrt{7}} + \frac{1}{1-\sqrt{7}} \right)^{-2} + \left(\frac{1}{1+\sqrt{7}} \right)^{-2} + \left(\frac{1}{1-\sqrt{7}} \right)^{-2}$$

$$(b) \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} - \frac{15}{\sqrt{3}-3} \right) (\sqrt{3}+5)^{-1}$$

$$(c) 32^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{-11} + \left(\frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{1-\sqrt{5}} \right)^{-1} + (0.5 : 1.25)^{-1}$$

$$(d) \frac{1 - 2^{-1/2}}{1 + 2^{-1/2}} + \frac{1 + 2^{-1/2}}{1 - 2^{-1/2}}$$

rešenje: (a) 25, (b) $\frac{1}{2}$, (c) 2.5, (d) 6

3. Izračunati vrednost izraza $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ za $a = 3 + \sqrt{5}$ i $b = 3 - \sqrt{5}$

rešenje: $3\sqrt{5}$

Razni zadaci

1. Uprostiti izraz:

$$(a) \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, a > 0, b > 0, a \neq b$$

$$(b) \left(\frac{1}{a-\sqrt{b}} + \frac{1}{a+\sqrt{b}} \right) : \frac{a}{a^2-b}, b > 0, a \neq \pm\sqrt{b}$$

$$(c) \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}, -1 < a < 1$$

$$(d) \left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} \right)^2, a > 0, b > 0$$

rešenje: (a) $2\sqrt{a}$, (b) 2, (c) $\frac{2}{1-a^2}$, (d) 1

2. Ako $x \in (9, \infty)$, uprostiti izraz

$$\left(\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{x^{0.5}+3}{x^{1.5}-27} \right)^{0.5} - x^{0.5}$$

rešenje: -3

3. Ako je $0 < a < b$, uprostiti izraz

$$\left(1 + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^{-2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

rešenje: $\frac{a+b}{-a+b}$

4. Uprostiti izraz

$$(\sqrt{ab} - ab(a + \sqrt{ab})^{-1}) : (2((ab)^{1/2} - b)(a - b)^{-1})$$

rešenje: $a/2$