Logika

1. Dati su iskazi:

$$p:\ 1-\left(2-\frac{5}{4}\right)=-\frac{7}{9},\qquad q:3-\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-5\cdot\left(1-\frac{7}{4}\right)-(5\ \cdot 0.2-1)\right)=\frac{1}{4}$$

Odrediti istinitosnu vrednost sledećih iskaza:

$(a)\ p\Longrightarrow q$ $\qquad(d)\ \neg\, q\Longleftrightarrow p$

$(b)\ \neg\, p\vee q$ $\qquad(e)\ \neg\, p\Longrightarrow(\neg\,(p\vee\neg\, q))$

$(c)\ \neg\, p\Longrightarrow(p\vee\neg\, q)$

rešenje: $v(p)=\perp,\ v(q)=\top$

$(a)\ \top,\ (b)\ \top,\ (c)\ \perp,\ (d)\ \top,\ (e)\ \perp$

2. Dati su iskazi:

$$p:-2-4+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}-3\right)=\frac{47}{10}$$

$$q:\frac{4}{3}-\frac{5}{9}:\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot(-5)=-\frac{10}{3}$$

$$r:2\cdot\left(\sqrt{3-\frac{2}{9}}+\sqrt{2-\frac{7}{16}}\right)-6\cdot\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{25}{4}}-\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{3}$$

Odrediti istinitosnu vrednost sledećih iskaza:

$(a)\ \neg\, p\vee\neg\, q$ $\qquad(c)\ \neg\,(\neg\, r\vee q)\Longleftrightarrow(p\Longrightarrow\neg\, q)$

$(b)\ p\wedge(\neg\, q\Longrightarrow r)$

rešenje: $v(p)=\perp,\ v(q)=\top,\ v(r)=\top$

$(a)\ \top,\ (b)\ \perp,\ (c)\ \perp$

3. Odrediti istinitosne vrednosti iskaza

$$p:\ \frac{3+2x}{3}-\frac{2-3x}{4}=\frac{29}{4},\quad \text{za}\, x=0.5$$

$$q:\ 3\,(5-y)-2\,(y-1)=1+3\,y,\quad \text{za}\ y=2$$

a zatim odrediti istinitosne vrednosti sledećih iskaza

$(a)\ (p\vee q)\wedge p,\quad (b)\ (p\wedge q)\vee q,\quad (c)\ (\neg\, p\Longrightarrow\neg\, q)\Longleftrightarrow\neg\, q$

rešenje: $v(p)=\perp,\ v(q)=\top$

$(a)\ \perp,\ (b)\ \top,\ (c)\ \top$

4. Ako su p i q netačni iskazi, odrediti istinitosnu vrednost sledećih iskaza:

$(a)\ q\Longrightarrow((\top\Longrightarrow p)\Longrightarrow\top)$ $\qquad(b)\ ((p\wedge q)\wedge\perp)\Longrightarrow((p\vee q)\vee\top)$

rešenje: $(a)\ \top,\ (b)\ \top$

5. Dokazati da su sledeće formule tautologije

$(a)\ p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p$

$(b) \neg (p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$(c) \neg (p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

$(d)\ (p \wedge (q \Longleftrightarrow r)) \Longrightarrow p$

$(e)\ ((p \vee q) \Longrightarrow r) \Longleftrightarrow ((p \Longrightarrow r) \wedge (q \Longrightarrow r))$

Kvantifikatori

6. Koristeći kvantifikatore $\forall, \exists$ napisati sledeće rečenice:

(a) Postoji prirodan broj manji od 5,

(b) Bar jedan prirodan broj je manji od 5,

(c) Svaki racionalan broj je realan broj,

(d) Svaki realan broj je pozitivan ili negativan, ili jednak nuli,

(e) Svaki realan broj pomnožen sa 1 jednak je samom sebi,

(f) Postoji prirodan broj koji je rešenje jednačine $2x - 4 = 0$,

(g) Svaki realan broj x je rešenje jednačine $0 \cdot x = 0$.

rešenje:

$(a)\ (\exists\, x \in N)\ x < 5$ $(b)\ (\exists\, x \in N)\ x < 5$

$(c)\ (\forall\, x \in Q)\, x \in R$ $(d)\ (\forall\, x \in R)\ (x > 0 \vee x < 0 \vee x = 0)$

$(e)\ (\forall\, x \in R)\, x \cdot 1 = x$ $(f)\ (\exists\, x \in N)\, 2x - 4 = 0$

$(g)\ (\forall\, x \in R)\ 0 \cdot x = 0$

7. Zapisati upotrebom kvantifikatora sledeće rečenice:

(a) Zbir ma koja dva prirodna broja je prirodan broj,

(b) Proizvod svaka dva cela broja je ceo broj,

(c) Od svakog prirodnog broja postoji veće prirodan broj,

(d) Za svaki ceo broj x postoji tačno jedan ceo broj y, tako da je $x + y = 5$.

rešenje:

$(a)\ (\forall\, x \in N)\ (\forall\, y \in N)\ x + y \in N$ $(b)\ (\forall\, x \in Z)\ (\forall\, y \in Z)\ x \cdot y \in Z$

$(c)\ (\forall\, x \in N)\ (\exists\, y \in N)\ y > x$ $(d)\ (\forall\, x \in Z)\ (\exists_1\, y \in Z)\, x + y = 5$

8. Sledeći formalni zapis napisati rečima:

$(a)\ (\exists\, x \in N)\, x = 1$ $(b)\ (\exists\, x \in N)\, x > 5$

$(c)\ (\exists\, x \in N)\, (x = 1 \vee x > 5)$ $(d)\ (\forall\, x)\, (x = 1 \vee x \neq 1)$

$(e)\ (\forall\, x)\, (x \in Z \Longrightarrow x \in Q)$ $(f)\ (\exists\, x)\, (x \in Z \wedge x \in N)$

rešenje:

(a) Postoji prirodan broj koji je jednak 1,

(b) Postoji prirodan broj koji je veći od 5,

(c) Postoji prirodan broj koji je jednak 1 ili veći od 5,

(d) Svaki broj je jednak 1 ili različit od 1,

(e) Svaki ceo broj je racionalan broj (ili Za svaki broj x koji je ceo sledi da je x racionalan broj),

(f) Postoji broj koji je ceo i prirodan.

Skupovi

9. Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $C = \{3, 4, 8, 10\}$.

Odrediti sledeće skupove:

(a) $A \cap B$ (b) $A \cup C$ (c) $A \setminus C$ (d) $B \setminus C$,

(e) $(A \cap B) \setminus C$ (f) $(A \setminus B) \cup (C \setminus A)$ (g) $(A \cup B) \cap C$

rešenje:

(a) $A \cap B = \{1, 2\}$ (b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

(c) $A \setminus C = \{1, 2, 5, 6\}$ (d) $B \setminus C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(e) $(A \cap B) \setminus C = \{1, 2\}$ (f) $(A \setminus B) \cup (C \setminus A) = \{3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

(g) $(A \cup B) \cap C = \{3, 4\}$

10. Odrediti skupove A i B ako je:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$, $6 \notin A$, $5 \notin B \setminus A$

rešenje:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

11. Odrediti skupove A i B, ako je:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3, 4, 5\}$, $1 \notin A \setminus B$, $2 \notin B \setminus A$

rešenje:

$A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$

12. Dati su skupovi:

$A = \{x : x \mid 12 \wedge x \in N\}$, $B = \{1, 3, 7\}$, $C = \{y : y \in N \wedge 0 < y < 9\}$

Odrediti: (a) $A \cup B$, (b) $A \cap C$, (c) $(A \cup B) \cap C$, (d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, ($e$) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

rešenje:

(a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12\}$ (b) $A \cap C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(c) $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ (d) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(e) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12\}$

13. Dati su skupovi:

$$A = \{a \in Z \wedge a^2 - 4 = 0\},\ B = \{b \in Z \wedge -3 < b < 3\},\ C = \{c \in N \wedge c \leqslant 7\}$$

Odrediti skupove:

$$(a)\ (A \setminus B) \setminus C \qquad (b)\ (A \bigcup B) \setminus C \qquad (c)\ (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C)$$

$$(d)\ (A \bigcap B) \setminus C \qquad (e)\ (A \bigcap B) \setminus (A \bigcap C)$$

rešenje:

$$(a)\ (A \setminus B) \setminus C = \{\} \qquad (b)\ (A \bigcup B) \setminus C = \{-2, -1, 0\} \qquad (c)\ (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C) = \{\}$$

$$(d)\ (A \bigcap B) \setminus C = \{-2\} \qquad (e)\ (A \bigcap B) \setminus (A \bigcap C) = \{-2\}$$

14. Dati su skupovi:

$$A = \{x \in Z \wedge x^2 = 16\},\ B = \{x \in N \wedge x \mid 12\},\ C = \{x \in N \wedge 2 \leqslant x < 8\},$$

$$D = \{x \in Z \wedge x \geqslant -1 \wedge x < 6\}$$

Odrediti skupove:

$$(a)\ A \bigcap B,\quad (b)\ (A \setminus B) \bigcup C,\quad (c)\ (A \setminus C) \bigcup (B \setminus D),\quad (d)\ (A \setminus B) \setminus D,\quad (e)\ (C \bigcap B) \setminus (C \setminus D)$$

rešenje:

$$(a)\ A \bigcap B = \{4\} \qquad (b)\ (A \setminus B) \bigcup C = \{-4, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$(c)\ (A \setminus C) \bigcup (B \setminus D) = \{-4, 6, 12\} \qquad (d)\ (A \setminus B) \setminus D = \{-4\}$$

$$(e)\ (C \bigcap B) \setminus (C \setminus D) = \{2, 3, 4\}$$

15. U jednom odeljenju od 30 učenika odgovaralo je: 19 učenika matematiku, 17 učenika fiziku, 11 učenika istoriju, 12 učenika matematiku i fiziku, 7 učenika istoriju i matematiku, 5 učenika fiziku i istoriju i 2 učenika sva tri predmeta.

(*a*) Koliko učenika je odgovaralo istoriju, ali ne i matematiku?
(*b*) Koliko učenika je odgovaralo dva predmeta od tri moguća?
(*c*) Koliko učenika je odgovaralo samo istoriju?

rešenje:

$(a)\ 4,\ \ (b)\ 18,\ \ (c)\ 1$

16. Na jednom kursu stranih jezika svaki polaznik uči bar jedan strani jezik (engleski, francuski i nemački), i to: 18 polaznika uči francuski, 22 polaznika uči engleski, 15 uči nemački, 6 uči engleski i francuski, 11 uči engleski i nemački, 1 uči sva tri jezika. Koliko polaznika ima na tom kursu, i koliko njih uči samo dva jezika?

rešenje: Ima 38 polaznika, samo dva jezika uči njih 15.

17. U jednom prevodilačkom birou radi 52 prevodioca. Među njima 20 govori ruski, 19 francuski, a 35 engleski. Ruski i engleski govori njih 11, francuski i ruski njih 7, francuski i engleski 9.

(*a*) Koliko prevodilaca govori sva tri jezika?
(*b*) Koliko njih govori samo ruski?

rešenje: $(a)\ 5,\ \ (b)\ 7.$

18. U jednom odeljenju od 30 učenika svako od njih se bavi bar jednim od sportova: košarkom, odbojkom, rukometom. Košarkom i odbojkom se bavi 8 učenika, košarkom i rukometom 12 učenika, odbojkom i

rukometom 5 učenika. Odbojkom se bavi 16 učenika, samo košarkom 3 učenika i samo rukometom 1 učenik. Koliko učenika trenira sva tri sporta?

rešenje: 2 učenika

19. Svaki od učenika jednog odeljenja je pročitao bar jednu od knjiga A,B,C. Knjige A i B pročitalo je 5 učenika, knjige B i C 6 učenika, knjige A i C 4 učenika. Knjigu A je pročitalo 10 učenika, knjigu B 12 učenika, a knjigu C 14 učenika. Koliko učenika je pročitalo sve tri knjige, ako u odeljenju ima 25 učenika?

rešenje: Sve tri knjige je pročitalo 4 učenika

20. U jednom odeljenju je svaki učenik odgovarao bar jedan od sledećih predmeta: geografiju, engleski, istoriju. Sva tri predmeta je odgovaralo 2 učenika, geografiju i engleski 5 učenika, geografiju i istoriju 6 učenika. Engleski ali ne istoriju 10 učenika, istoriju ali ne engleski 7 učenika, geografiju 12 učenika, samo dva predmeta 8 učenika. Koliko učenika ima u tom odeljenju?

rešenje: 23 učenika

21. U jednom preduzeću svako od zaposlenih govori bar jedan od stranih jezika: francuski, španski, italijanski. Sva tri jezika govore 2 zaposlena, samo francuski i španski 2, španski ali ne italijanski 7, francuski i italijanski 5, samo dva jezika 11, samo francuski 5, a italijanski govori 15 zaposlenih. Koliko ima zaposlenih u tom preduzeću?

rešenje: 27 zaposlenih