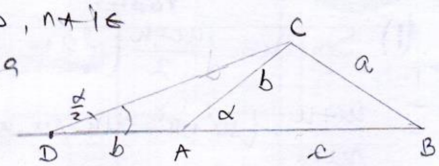
① (I) Конструисати ΔABC ако је дата једна страница, угао наспрам ње и збир друге две странице

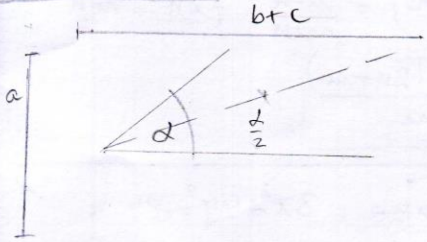
1₁

Анализа: Нека су дати елементи a, α и $b+c$

ΔADC је једнакокраки јер је $AD = AC = b$, па је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACD = \frac{\alpha}{2}$. Зато, ΔBCD може да се конструише јер има познате 2 странице и угао наспрам једне од њих. Тако се добијају темена B и C. Теме A лежи на симетрали дужи CD.



Конструкција

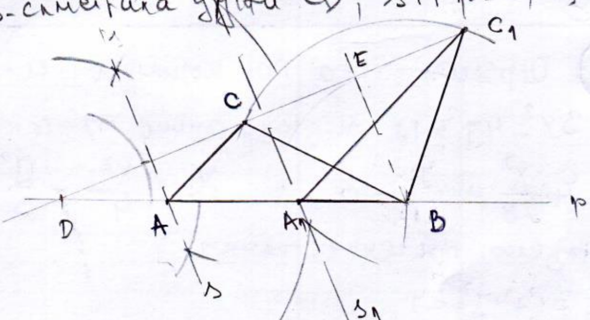


Нека је дата полуправа Dp;

$k(D, b+c) \cap p = \{B\}$

$\sphericalangle pDq = \frac{\alpha}{2}$; $k(B, a) \cap q = \{C\}$

s - симетрала дужи CD; $s \cap p = \{A\}$



Доказ: Из конструкције и анализе следи да ΔABC има страницу a и угао α и странице b и c чији је збир једнак дужи $b+c$

Дискусија: ΔABC може се конструисати ако је $a < b+c$. ΔBCC_1 је једнакокраки па број решења зависи од нормале BE тј. висине ΔBCC_1 ($BC = BC_1 = a$) Ако је

$BE < a$ - задатак има 2 реш.

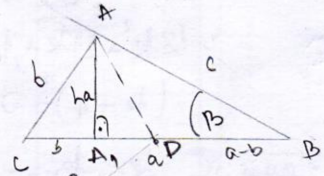
$BE = a$ - — II — 1 реш

$BE > a$ - задатак нема реш.

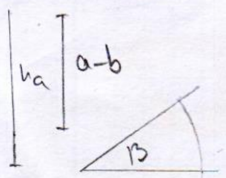
(II) Конструисати троугао ако је дата разлика две странице, висина која одговара већој од њих и угао наспрам мање странице.

Анализа: Нека су дати елем. $a-b, h_a, \beta$.

ΔABD може се конструисати јер су познати њена висина (AA_1), угао и страница BD. ΔACD је једнакокраки, па ће се теме C налазити на симетрали дужи AD.



Конструкција



Пренесемо угао $\beta = \sphericalangle pBq$

$k(B, a-b) \cap p = \{D\}$

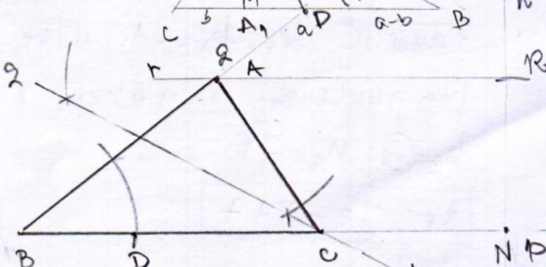
$N \in p$, $n \perp p$, $N \in n$

$k(N, h_a) \cap n = \{R\}$

$R \in r$, $r \parallel p$; $r \cap q = \{A\}$

s - симетрала од AD

$s \cap p = \{C\}$



Доказ: следи из анализе и конструкције

Дискусија: пошто се полуправа Bq и права r могу сећи само у једној тачки, задатак има само једно решење.

② Одредити параметре a и b тако да:

(I) полином $P(x)=x^3+ax^2+bx+4$ буде дељив са x^2+3x-4

(II) полином $P(x)=x^4-x^3+x^2+ax+b$ —||— x^2-5x+6.

(I) Пошто је $x^2+3x-4=x^2+4x-x-4=x(x+4)-(x+4)=(x+4)(x-1)$, то $P(x)$ треба да је дељив са $x+4$ и $x-1$ шт.

$P(-4)=0$ и $P(1)=0$ шт. $-64+16a-4b+4=0 \Rightarrow 4a-b=15$

$1+a+b+4=0 \to a+b=-5$

Из система је $a=2$, $b=-7$, па је полином $P(x)=x^3+2x^2-7x+4$.

(II) Слично као у примеру (I) имамо ...

$x^2-5x+6=x^2-3x-2x+6=x(x-3)-2(x-3)=(x-3)(x-2)$

$P(3)=0$ П. $3a+b=-63$ ... $a=-51$

$P(2)=0$ П. $2a+b=-12$ ... $b=90$ дакле, $P(x)=x^4-x^3+x^2-51x+90$

③ Раставити на чиниоце полиноме:

(I) a) $a^3b^2-a^3-8b^2+8$ б) x^4+4y^4

(II) a) $x^3y^3-x^3-y^3+1$ б) x^4+4

(I) a) $b^2(a^3-8)-(a^3-8)=(a^3-8)(b^2-1)=(a-2)(a^2+2a+4)(b-1)(b+1)$

б) $x^4+4y^4=(x^2)^2+4x^2y^2+(2y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$

(II) (a) $x^3(y^3-1)-(y^3-1)=(y^3-1)(x^3-1)=(y-1)(x-1)(y^2+y+1)(x^2+x+1)$.

(б) $x^4+4=(x^2)^2+2^2-4x^2+4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

④ Скратити разломке:

(I) $\frac{25-x^2}{95x^3+19x^4}=\frac{(5-x)(5+x)}{19x^3(5+x)}=\frac{5-x}{19x^3},\ x\neq0$

(II) $\frac{4a^2-9b^2}{3b^2-2ab}=\frac{(2a-3b)(2a+3b)}{b(3b-2a)}=-\frac{\cancel{(3b-2a)}(2a+3b)}{b\cancel{(3b-2a)}}=-\frac{2a+3b}{b},\ b\neq0.$

⑤ (I) $\left(\frac{2}{m^2-m}-\frac{2m}{1-m^2}\right)\cdot\frac{2m^2+2m}{m^3-1}+\frac{4}{m-1}=\left(\frac{2}{m(m-1)}+\frac{2m}{(m-1)(m+1)}\right)\cdot\frac{2m(m+1)}{(m-1)(m^2+m+1)}+\frac{4}{m-1}$

$=2\cdot\frac{\cancel{m+1+m^2}}{(m-1)\cancel{(m+1)m}}\cdot\frac{\cancel{2m(m+1)}}{(m-1)\cancel{(m^2+m+1)}}+\frac{4}{m-1}=\frac{4}{(m-1)^2}+\frac{4}{m-1}=4\cdot\frac{1+m-1}{(m-1)^2}=\frac{4m}{(m-1)^2},\ m\neq1$

(II) $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)\cdot\left(a-\frac{2a-1}{a+1}\right)=\frac{a^2-a+1-\cancel{3}+3a+\cancel{3}}{(a+1)(a^2-a+1)}\cdot\frac{a^2+a-2a+1}{a+1}=$

$=\frac{a^2+2a+1}{(a+1)\cancel{(a^2-a+1)}}\cdot\frac{\cancel{a^2-a+1}}{a+1}=\frac{(a+1)^2}{(a+1)^2}=1.$