① У првом задатку требало је испитати ток и скицирати график од f:

I група

$$y=\frac{(x-2)(x+2)}{(3-x)(3+x)}=\frac{x^2-4}{9-x^2}$$

- Домен: $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$
- Парност: $f(-x)=f(x)$ – парна
- а) Нуле: $A(2,0)$ $B(-2,0)$

б) $G_f\cap Oy=\{(0,-\frac{4}{9})\}$

в) Знак:

	-3	-2	2	3
$++++$		$--$	$++++$	
$---$	$+$	$+++$	$++$	$---$
$-$	$+$	$-$	$++$	$-$

$y>0: x\in(-3,-2)\cup(2,3)$

$y<0: x\in(-\infty,-3)\cup(-2,2)\cup(3,+\infty)$

- Асимптоте: $x=3$, $x=-3$: В.А

$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\frac{5}{6\cdot 0_-}=-\infty$; $\lim_{x\to 3-0} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to -3+0} f(x)=\frac{5}{6\cdot 0_+}=+\infty$; $\lim_{x\to -3-0} f(x)=-\infty$

$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-1}=-1$

хориз. асимптота: $y=-1$

– нема К.А.

- Монотоност: $y'=\frac{2x(9-x^2)+2x(x^2-4)}{(9-x^2)^2}=$

$=\frac{10x}{(9-x^2)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & -3 & 0 & 3 \\
y' & ---- & & ++++ \\
y & \searrow\ \searrow & & \nearrow\ \nearrow
\end{array}$$

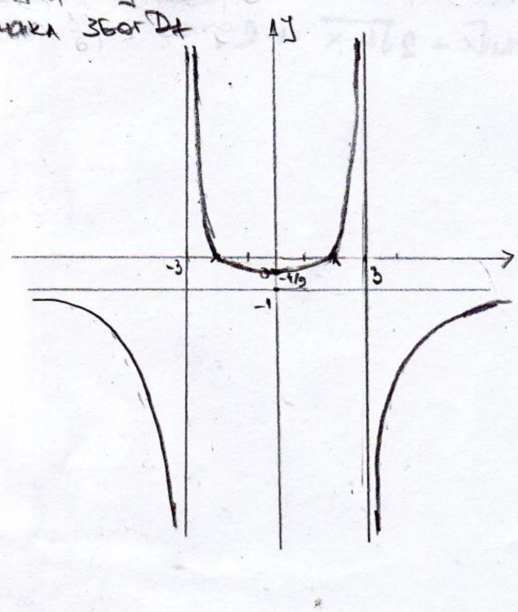
Тачка $(0,-\frac{4}{9})$ – минимум

- Конвексност: $y''=\frac{10\cdot[(9-x^2)^2+4x^2(9-x^2)]}{(9-x^2)^4}=$

$=\frac{10\cdot(9-x^2+4x^2)}{(9-x^2)^3}=\frac{30\cdot(3+x^2)}{(9-x^2)^3}$. $3+x^2>0,\ \forall x$

$$\begin{array}{c|c|c}
-- & +++ & -- \\
\frown & -3\ \smile\ 3 & \frown
\end{array}$$

нема превојних тачака због D_f



II група

$$y=\frac{x-1}{x^2(x-2)}$$

- Домен: $x\in(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$
- Парност: ни, ни
- а) Нуле: $A(1,0)$

б) $G_f\cap Oy=\emptyset$

в) Знак

	0	1	2	
$---$		$++$	$+++$	$x-1$
$-$		$---$	$+++$	$x-2$
$+$		$-$	$+$	

$y>0: x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$; $y<0: x\in(1,2)$

- Асимптоте $x=0$, $x=2$: В.А

$\lim_{x\to 0_+} f(x)=\frac{-1}{-2\cdot 0_+}=+\infty$; $\lim_{x\to 0_-} f(x)=\frac{-1}{-2\cdot 0_+}=+\infty$

$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\frac{1}{4\cdot 0_+}=+\infty$; $\lim_{x\to 2-0} f(x)=\frac{1}{4\cdot 0_-}=-\infty$

$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^3-2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x}}=0$; $\boxed{y=0: \text{Х.А}}$

нема косу асимптоту

- Монотоност: $y'=\frac{x^2(x-2)-(x-1)(2x(x-2)+x^2)}{x^4(x-2)^2}=$

$=\frac{x(x-2)-(x-1)(2x-4+x)}{x^3(x-2)^2}=\frac{x^2-2x-3x^2+7x-4}{x^3(x-2)^2}=$

$=\frac{-2x^2+5x-4}{x^3(x-2)^2}\neq 0,\ \forall x\in D_f$

$-2x^2+5x-4<0,\ \forall x\in D_f$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & 0 & & 2 \\
y' & ++++ & ---- & - \\
y & \nearrow & \searrow & \searrow
\end{array}$$

нема екстремне вредности

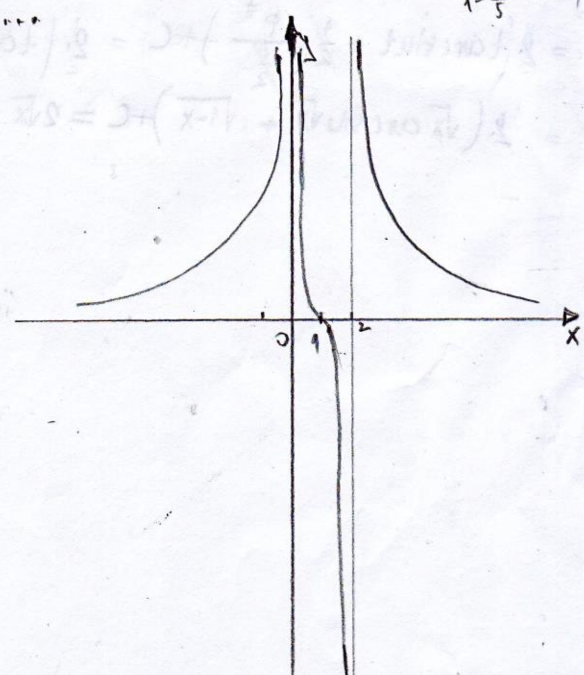
- Конвексност: $y''=\frac{(-2x^2+5x-4)'x^3(x-2)^2-(-2x^2+5x-4)(x^3(x-2)^2)'}{x^6(x-2)^4}$

$=\frac{(-4x+5)x^3(x-2)^2-(-2x^2+5x-4)\cdot(3x^2(x-2)^2+2x^3(x-2))}{x^6(x-2)^4}=$

$=\frac{(-4x+5)(x^2-2x)-(-2x^2+5x-4)(3x-6+2x)}{x^4\cdot(x-2)^3}=$

$= \dots$

$x=\frac{6}{5}$ – превој



② Требало је израчунати интеграл који се своди на таблични

I група $\int ctg^2x\,dx = \int \frac{\cos^2x}{\sin^2x}dx = \int \frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}dx = \int\frac{dx}{\sin^2x} - \int dx = -ctg\,x - x + C$

II група $\int tg^2x\,dx = \int \frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx = \int \frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx = \int\frac{dx}{\cos^2x} - \int dx = tg\,x - x + C$

③ Интеграл методом замене:

I група $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^4}} = \frac{1}{\sqrt3}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{\sqrt3}\right)^2}} = \left[\begin{array}{l}\text{смена: } \frac{x^2}{\sqrt3}=t\\ 2x\,dx=\sqrt3\,dt\end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$

$= \frac12\arcsin t + C = \frac12 \arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt3}\right) + C$

II група $\int\frac{x^2dx}{4+x^6} = \frac14\int\frac{x^2dx}{1+\left(\frac{x^3}{2}\right)^2} = \left[\begin{array}{l}\text{смена: } \frac{x^3}{2}=t\\ 3x^2dx=2dt\end{array}\right] = \frac14\cdot\frac23\int\frac{dt}{1+t^2} =$

$= \frac16 arctg\,t + C = \frac16 arctg\left(\frac{x^3}{2}\right) + C.$

④ Интеграл који се решава парцијалном интеграцијом:

I група $\int x^3e^{-x^2}dx = \left[\begin{array}{l} u=x^2 \wedge xe^{-x^2}dx = dv \ \left(\text{смена: } -x^2=t;\ -2x\,dx=dt\right)\\ du=2x\,dx \wedge v=\int -\frac12 e^t dt = -\frac12 e^{-x^2}\end{array}\right] =$

$= -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}dx = \left[\begin{array}{l}\text{смена: } -x^2=t\\ -2x\,dx=dt\end{array}\right] = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} - \int\frac12 e^t dt = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} - \frac12 e^{-x^2} + C$

$= -\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} + C$

II група $\int\frac{\arcsin\sqrt x}{\sqrt x}dx = \left[\begin{array}{l}\text{смена: } \sqrt x = t\\ \frac{1}{2\sqrt x}dx = dt\end{array}\right] = 2\cdot\int \arcsin t\,dt = \left[\begin{array}{l} u=\arcsin t \wedge dv=dt\\ du=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \wedge v=t\end{array}\right]$

$= 2\left(t\cdot\arcsin t - \int\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \left[\begin{array}{l}\text{смена: } 1-t^2=p\\ -2t\,dt=dp\end{array}\right] = 2\left(t\arcsin t + \frac12\int p^{-1/2}dp\right) =$

$= 2\left(t\arcsin t + \frac12\cdot\frac{p^{\frac12}}{\frac12}\right) + C = 2\left(t\arcsin t + \sqrt{1-t^2}\right) + C =$

$= 2\left(\sqrt x\arcsin\sqrt x + \sqrt{1-x}\right) + C = 2\sqrt x\arcsin\sqrt x + 2\sqrt{1-x} + C.$