

Nule i znak funkcije

1. Ispitati znak i odrediti nule funkcije

$$(a) y = \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 + 3x - 4}$$

$$(b) y = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$(c) y = (x^2 - 4x + 3)e^x$$

$$(d) y = e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$(e) y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}$$

$$(f) y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$$

$$(g) y = \log_3(x+2)$$

$$(h) \log \frac{2x}{x+1}$$

$$(i) y = \frac{2x+3}{\sqrt{3x-5}}$$

rešenje:

$$(a) y > 0 \text{ za } x \in (-\infty, 7) \cup (-4, 1) \cup (3, \infty),$$

$$y < 0 \text{ za } x \in (-7, -4) \cup (1, 3), \text{ nule funkcije su: } x = -7, x = 3$$

$$(b) y > 0 \text{ za } x > 0, y < 0 \text{ za } x < 0, \text{ nula funkcije je } x = 0$$

$$(c) y > 0 \text{ za } x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty), y < 0 \text{ za } x \in (1, 3), \text{ nule: } x = 1, x = 3$$

$$(d) \text{ Funkcija je pozitivna u svim tačkama u kojima je definisana, nema nula}$$

$$(e) y > 0 \text{ za } x \in (-1, 2) \cup (2, \infty), y < 0 \text{ za } x \in (-\infty, -1), \text{ nule: } x = -1, x = 2$$

$$(f) y > 0 \text{ za } x \in (-\infty, -3) \cup \left(0, \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right), y < 0 \text{ za } x \in \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \infty\right), \text{ nula: } x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

$$(g) y > 0 \text{ za } x \in (-1, \infty), y < 0 \text{ za } x \in (-2, -1), \text{ nula: } x = -1$$

$$(h) y > 0 \text{ za } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty), y < 0 \text{ za } x \in (0, 1), \text{ nula: } x = 1$$

$$(i) y > 0 \text{ za } x \in \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$$

Parnost funkcije

2. Ispitati parnost sledećih funkcija

$$(a) f(x) = x^2 - 3x^4$$

$$(b) f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 2x$$

$$(c) f(x) = x \sin x$$

$$(d) f(x) = \frac{\cos 2x}{3x}$$

$$(e) f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$$

$$(f) f(x) = \frac{3x^2 - 4}{\operatorname{tg} x \cdot \cos 2x}$$

$$(g) f(x) = \operatorname{ctg}(x^3 - 5x) \quad (h) f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x-x^2} \quad (i) f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$(j) f(x) = \log \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \quad (k) f(x) = \frac{a^x+1}{a^x-1}$$

rešenje:

Funkcije (a), (c), (i) su parne funkcije, ostale su neparne.

Granična vrednost funkcije

3. Odrediti granične vrednosti sledećih funkcija

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x - 2}{x^2 - 3x^3 - 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 7}{x - 1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{3x^2 - 2x + 3} \quad (e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2} \quad (f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 1)^2}{2x^2 - 3}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^2 - 2(x + 2)}{2x^2 - 1} \quad (h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x^4 - 1}} \quad (i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 8x}}{x + 1} \quad (k) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{x - 2} \quad (l) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x + 1}$$

rešenje: (a) 2, (b) $-\frac{2}{3}$, (c) ∞ , (d) 0, (e) 0, (f) 2, (g) 2, (h) 2, (i) 3, (j) 2, (k) 2, (l) 0

4. Odrediti granične vrednosti sledećih funkcija

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{2x - 4} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - 5x + 3} \quad (e) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1} \quad (f) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 6x + 9}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4} \quad (h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} \quad (i) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$$

rešenje: (a) 1, (b) $\frac{5}{2}$, (c) $\frac{14}{5}$, (d) -3, (e) 6, (f) ∞ , (g) ∞ , (h) 0, (i) 0

5. Odrediti granične vrednosti sledećih funkcija

$$(a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{2x-12} \quad (c) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+12} - 3}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x-8} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x-6} - 1}{x-7} \quad (f) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+7} - \sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13} - \sqrt{x+22}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{7x-3}} \quad (h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{3 - \sqrt[3]{x+25}} \quad (i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$$

rešenje: (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{1}{12}$, (c) -36, (d) $\frac{1}{12}$, (e) $\frac{1}{3}$, (f) $\frac{5}{12}$, (g) $\frac{7}{12}$, (h) $-\frac{27}{4}$, (i) $\frac{2}{3}$

6. Odrediti granične vrednosti sledećih funkcija

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$$

rešenje: (a) $\frac{1}{2}$, (b) $\frac{5}{2}$, (c) ∞ , (d) 0

7. Odrediti granične vrednosti sledećih funkcija

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x} \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{1 + \sin 3x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2} \quad (h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin 2x}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} \quad (k) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) \quad (l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$$

rešenje:

$$(a) 7 \quad (b) \frac{4}{3} \quad (c) 1 \quad (d) 3 \quad (e) \frac{2}{5} \quad (f) 0$$

$$(g) -4 \quad (h) \frac{1}{2} \quad (i) \frac{3}{4} \quad (j) \frac{1}{2} \quad (k) 0 \quad (l) \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

8. Odrediti granične vrednosti sledećih funkcija

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^2 \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{2x+1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+1} \right)^{x^2} \quad (e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^x \quad (f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2} \right)^x$$

rešenje:

$$(a) 1 \quad (b) \sqrt{e^9} \quad (c) e^{10} \quad (d) 1 \quad (e) \frac{1}{e} \quad (f) e^2$$