Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije

1. Ispitati monotonost i odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$(a)\ f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ $\qquad (b)\ f(x) = \dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+1}$

$(c)\ f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$ $\qquad (d)\ f(x) = x\sqrt{x+3}$

$(e)\ f(x) = (x+1)(x+4)(2-x)$ $\qquad (f)\ f(x) = x - 2\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$

$(g)\ f(x) = (x-1)^2(x+2)$ $\qquad (h)\ f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+1}}$

$(i)\ f(x) = (3-x^2)e^{-x}$ $\qquad (j)\ f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

rešenje:

$(a)\ D_f : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty), \quad f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

Funkcija je rastuća za $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, opadajuća za $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, $A_{\min}(0, 1)$

$(b)\ D_f : x \in R, \quad f'(x) = \dfrac{3x^2+8x-3}{(x^2+1)^2}$

Funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -3) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$, opadajuća za $x \in (-3, \frac{1}{3})$, $A_{\max}(-3, \frac{5}{2})$, $B_{\min}(\frac{1}{3}, -\frac{5}{2})$

$(c)\ D_f : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty), \quad f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2-1)^2}$

Funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, opadajuća za $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, $A_{\max}(0, -2)$

$(d)\ f'(x) = \dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

$D_f : x \in [-3, \infty)$, funkcija je rastuća za $x \in (-2, \infty)$, opadajuća za $x \in (-3, -2)$, $A_{\min}(-2, -2)$

$(e)\ D_f : x \in R, \quad f'(x) = -3(x^2+2x-2)$

Funkcija je rastuća za $x \in \left(-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right)$, opadajuća za $x \in \left(-\infty, -1-\sqrt{3}\right) \cup \left(-1+\sqrt{3}, \infty\right)$, $A_{\min}\left(-1-\sqrt{3}, -6\sqrt{3}\right)$, $B_{\max}\left(-1+\sqrt{3}, 6\sqrt{3}\right)$

$(f)\ D_f : x \in R \setminus \{-1\}, \quad f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

Funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, opadajuća za $x \in (-1, 1)$, $A_{\min}(1, 1)$

$(g)\ D_f : x \in R, \quad f'(x) = 3(x-1)(x+1)$

Funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, opadajuća za $x \in (-1, 1)$, $A_{\max}(-1, 4)$, $B_{\min}(1, 0)$

$(h)\ D_f : x \in R,\quad f'(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

Funkcija je rastuća za $x \in (-\frac{1}{3}, \infty)$, opadajuća za $x \in (-\infty, -\frac{1}{3})$, $A_{\min}\left(-\frac{1}{3}, -\sqrt{10}\right)$

$(i)\ f'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 3)$

Funkcija je rastuća za $x \in (-\infty, -1) \bigcup (3, \infty)$, opadajuća za $x \in (-1, 3)$,
$A_{\max}(-1, 2e)$, $B_{\min}(3, -\frac{6}{e^3})$

$(j)\ D_f : x \in R \setminus \{0\},\quad f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

Funkcija je rastuća za $x \in (1, \infty)$, opadajuća za $x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, 1)$, $A_{\min}(1, e)$

2. Odrediti najmanju i najveću vrednost

(a) funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ na intervalu $[-1, 2]$

(b) funkcije $f(x) = x^2 - 4x + 7$ na intervalu $[1, 4]$

(c) funkcije $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ na intervalu $[-5, 5]$

(d) funkcije $f(x) = e^x + e^{-x}$ na intervalu $[-1, 2]$

rešenje: (a) Najmanja vrednost se dostiže za $x = -1$ i $f(-1) = -5$, a najveća za $x = 2$ i iznosi $f(2) = 4$;
(b) najmanja vrednost je 3, a najveća 7;
(c) najmanja vrednost je -86, a najveća 400;
(d) najmanja vrednost je 2, a najveća $e^2 + 1/e^2$