
Logaritmi

1. Izračunati:

$$(a) \log_2 32 \quad (b) \log_2 \frac{1}{2} \quad (c) \log_{\sqrt{2}} 4 \quad (d) \log_{\frac{1}{2}} 8 \quad (e) \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$$

rešenje:

$$(a) 5 \quad (b) -1 \quad (c) 4 \quad (d) -3 \quad (e) 3$$

2. Odrediti a tako da važi:

$$(a) \log_a 27 = 3 \quad (b) \log_a 2\sqrt{2} = 3 \quad (c) \log_a 64 = 3 \quad (d) \log_a \frac{1}{9} = 2$$

rešenje:

$$(a) a = 3 \quad (b) a = \sqrt{2} \quad (c) a = 4 \quad (d) a = \frac{1}{3}$$

3. Odrediti b tako da važi:

$$(a) \log_2 (b + 3) = 3 \quad (b) \log (3b + 1) = 2 \quad (c) \log_3 (2b - \frac{1}{3}) = 2$$

rešenje:

$$(a) b = 5 \quad (b) b = 33 \quad (c) b = \frac{14}{3}$$

4. Odrediti b tako da važi $\log_2 \frac{b+2}{b-1} = -1$

rešenje: $b = -5$

5. Izračunati:

$$\begin{aligned} (a) \log_3 15 - \log_3 5 & & (b) \log_2 8 - 2 \log_6 3 - \log_6 4 \\ (c) \log_2 \frac{4}{3} - 2 \log_2 3 - 3 \log_2 \frac{1}{3} & & (d) \frac{5}{4} \log_3 81 + 3 \log_{\frac{1}{2}} 16 - 2 \log_2 \frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \\ (e) 3 \log_5 25 - 4 \log_3 27 + 2 \log_2 8 & & (f) \log_3 81 \cdot \log_3 \frac{1}{27} \cdot \log_2 16 \cdot \log_2 8 \\ (g) \log_2 16 \cdot \log_2 8 \cdot \log_2 4 \cdot \log_2 2 & & (h) \log_2 32 + 3 \log_{\sqrt{2}} 4 - 2 \log_{\frac{1}{3}} 9 + 3 \log_{\sqrt{27}} 9 \end{aligned}$$

rešenje:

$$(a) 1 \quad (b) 1 \quad (c) 2 \quad (d) 6 \quad (e) 0 \quad (f) -144 \quad (g) 24 \quad (h) 25$$

6. Izračunati:

$$\begin{aligned} (a) 2^{\log_2 8} + 6^{2 \log_6 2} & & (b) 5^{\log_5 10} + 3 \cdot 2^{\log_2 5} \\ (c) 5^{\log_5 10-1} + 3^{2-\log_3 10} & & (d) 5^{3-\log_5 25} + 3^{2-\log_3 3} - 2^{4+\log_2 5} \\ (e) (3^{\log_3 5})^3 - 2^{3 \log_2 3} + 5^{2 \log_5 6} & & (f) (81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2} \log_9 4} + 25^{\log_{25} 8}) \cdot 49^{\log_7 2} \\ (g) 9^{\log_3 5} (\log 400 - \log 4) & & \square \end{aligned}$$

rešenje:

$$(a) 12 \quad (b) 25 \quad (c) \frac{29}{10} \quad (d) -72 \quad (e) 188 \quad (f) 35 \quad (g) 50$$

7. Ako je $\log_5 4 = a$, $\log_5 3 = b$, odrediti $\log_5 12$.

rešenje: $\log_5 12 = a + b$

8. Ako je $\log_3 7 = a$, $\log_2 3 = b$, odrediti $(\log_7 3 + \log_2 3)^{-1}$

rešenje: $(\log_7 3 + \log_2 3)^{-1} = \frac{a}{1+ab}$

9. Ako je $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$, odrediti $\log_5 72$.

rešenje: $\log_5 72 = 2b + 3a$

10. Ako je $\log_7 2 = a$, odrediti $\log_{\frac{1}{7}} 28$.

rešenje: $\log_{\frac{1}{7}} 28 = -\frac{1+2a}{a}$

11. Ako je $\log_3 4 = 2a + 3b$, $\log_5 3 = \frac{a}{3}$, odrediti $\log_3 100$.

rešenje: $\log_3 100 = \frac{6+2a^2+3ab}{a}$

Logaritamske jednačine

1. Rešiti jednačine

$$(a) \log_4 (x^2 - 5) = 1 \quad (b) \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 5x + 7) = 0 \quad (c) \log_{x-1} 3 = 2$$

$$(d) \log_{x+1} 16 = 2 \quad (e) \log_x 3 = 2 \quad (f) \log_{x^2-1} 3 = 2$$

$$(g) \log_{5-x} (x^2 - 2x + 73) = 2 \quad \square \quad \square$$

rešenje:

$$(a) -3, 3 \quad (b) 2, 3 \quad (c) 1 + \sqrt{3} \quad (d) 3$$

$$(e) \sqrt{3} \quad (f) \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}} \quad (g) -6 \quad \square$$

2. Rešiti jednačine

$$(a) \log_4 \log_2 \log_3 x = \frac{1}{2} \quad (b) \log_2 \log_2 (x + 1) = 1$$

$$(c) \log_3 \log_8 \log_2 x = 0 \quad \square$$

rešenje:

$$(a) 81 \quad (b) 3 \quad (c) 256$$

3. Rešiti jednačine

$$(a) \log x + \log (x - 3) = 1 \quad (b) \log (5x) + \log (20x + 3) - 2 \log (3 - 10x) = 0$$

$$(c) \log \frac{x-2}{x-1} = 1 + \log \frac{x-3}{x-1} \quad (d) \log (x - 2) + \log (x + 2) = 2 \log (x - 1)$$

$$(e) \log_5 x = \log_5 20 - \frac{1}{2} \log_5 16 \quad (f) \ln (0.5 + x) = \ln 0.5 - \ln x$$

$$(g) \log \sqrt{x+3} + \log \sqrt{4x-3} = \log 5 \quad \square$$

rešenje:

$$(a) 5 \quad (b) \frac{3}{25} \quad (c) \frac{28}{9} \quad (d) \frac{5}{2} \quad (e) 5 \quad (f) 0.5 \quad (g) 2$$

4. Rešiti jednačine

$$(a) 4^x = 7 \quad (b) 2^{3x-1} = 5$$

rešenje:

$$(a) 1.40368 \quad (b) 1.10731$$

5. Rešiti jednačine

$$(a) (\log_3 x)^2 = 4 - 3 \log_3 x \quad (b) \log^2 x - \log x = 6$$
$$(c) (\log x)^2 - \log x^3 + 2 = 0 \quad \square$$

rešenje:

$$(a) x = 3, x = \frac{1}{81} \quad (b) x = \frac{1}{100}, x = 1000 \quad (c) x = 100, x = 10$$

6. Rešiti jednačine

$$(a) x^{1+\log_3 x} = 3x \quad (b) (\sqrt{x})^{\log_5 x-1} = 5 \quad (c) x^{2 \log_x 10} = 10x$$

rešenje:

$$(a) x = 3, x = \frac{1}{3}, \quad (b) x = 25, x = \frac{1}{5}, \quad (c) x = 10$$

7. Rešiti jednačine

$$(a) 5 \log x + \frac{2}{\log x} = 7, \quad (b) \frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$$
$$(c) \frac{3}{\log_2 x} - 1 = \log_2 x$$

rešenje:

$$(a) x = 10, x = \sqrt[5]{100}, \quad (b) x = 1000, x = 100, \quad (c) x = 4, x = \frac{1}{4}$$

8. Rešiti jednačine

$$(a) \log_5 x + \log_{25} x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{3}, \quad (b) \log_4 x + \log_8 x - 5 = 0,$$
$$(c) \log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$$

rešenje:

$$(a) x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \quad (b) x = 64, \quad (c) x = \sqrt{3}$$

9. Rešiti jednačine

$$(a) \log_{25} \left(\frac{1}{5} \log_3 (2 + \log_2 x) \right) = -\frac{1}{2}, \quad (b) \log_3 (5 + 4 \log_3 (x - 1)) = 2,$$
$$(c) \log (4 - 3 \log (2x + 3)) = 1$$

rešenje:

$$(a) x = 2, \quad (b) x = 4, \quad (c) x = -\frac{299}{200}$$

10. Rešiti jednačine

$$(a) \log_2 (2^x - 7) = 3 - x, \quad (b) \log_2 (2^x - 3) = 2 - x$$
$$(c) \log_2 (9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2 (3^{x-1} + 1)$$

rešenje:

$$(a) x = 3, \quad (b) x = 2, \quad (c) x = 1, x = 2$$

11. Rešiti jednačine

$$(a) 2 \log_{x+1} 5 = \log_5 (x + 1) - 1$$
$$(b) \log_2 x + 2 \log_x 2 = 3$$

rešenje:

$$(a) x = -\frac{4}{5}, x = 24, \quad (b) x = 2$$

Logaritamske nejednačine

12. Rešiti nejednačine

$$(a) \log_5 (6x + 1) < 1$$
$$(b) \log_2 (x - 1) < 0$$
$$(c) \log_3 (x^2 - 3) \leq 0$$
$$(d) \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 4) \leq 0$$
$$(e) \log_{\frac{1}{3}} (x - 1) > 1$$
$$(f) \log_{0.5} (x^2 - 5x + 6) > -1$$
$$(g) \log_3 \frac{1 + 2x}{1 + x} < 1$$

rešenje:

$$(a) x \in \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right), \quad (b) x \in (1, 2), \quad (c) x \in [-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2]$$
$$(d) x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty), \quad (e) x \in (-1, -\frac{2}{3})$$
$$(f) x \in (1, 2) \cup (3, 4), \quad (g) x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$