

## Kružnica

1. Odrediti koordinate centra i poluprečnik kružnice čija je jednačina:

$$(a) x^2 + y^2 - 4x + 5y - 10 = 0$$

$$(b) x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$$

$$(c) 4x^2 + 4y^2 + 80x + 12y + 265 = 0$$

$$\text{rešenje: } (a) O(2, -\frac{5}{2}), r = \frac{9}{2} \quad (b) O(5, -2), r = 5 \quad (c) O(-10, -\frac{3}{2}), r = 6$$

2. Naći jednačinu kružnice čiji je centar tačka  $O$ , a poluprečnik  $r$ :

$$(a) O(3, -2), r = 4 \quad (b) O(0, -2), r = 3 \quad (c) O(-5, 0), r = 4$$

$$\text{rešenje: } (a) (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16 \quad (b) x^2 + (y+2)^2 = 9 \quad (c) (x+5)^2 + y^2 = 16$$

3. Naći jednačinu kružnice koja dodiruje  $x$ -osu u tački  $(4, 0)$  i prolazi kroz tačku  $B(8, 8)$ .

$$\text{rešenje: } (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$$

4. Naći jednačinu kružnice koja sadrži tačke  $A(2, 3)$ ,  $B(-1, 1)$ , a centar joj se nalazi na pravoj  $x - 3y - 11 = 0$ .

$$\text{rešenje: } \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{130}{4}$$

5. Naći jednačinu kružnice koja sadrži koordinatni početak i tačke  $A(1, -1)$ ,  $B(-3, 1)$ .

$$\text{rešenje: } (x-3)^2 + (y+4)^2 = 28$$

6. Naći jednačinu kružnice koja sadrži tačke  $A(-1, 5)$ ,  $B(-2, -2)$ ,  $C(5, 5)$ .

$$\text{rešenje: } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

7. Naći jednačinu kružnice čiji je centar presečna tačka pravih  $3x - 4y + 11 = 0$  i  $5x + 7y - 50 = 0$ , a poluprečnik  $r = 5$ .

$$\text{rešenje: } (x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$$

8. Napisati jednačinu kružnice čiji je centar  $O(-3, 2)$  i koja prolazi kroz tačku  $M(0, 6)$ .

$$\text{rešenje: } (x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

9. Naći koordinate presečnih tačaka  $M$  i  $N$  prave  $p$  i kružnice  $k$ , ako:

$$(a) p: y = 2x + 2, k: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$$

$$(b) p: x - y - 1 = 0, (x-2)^2 + (y-2)^2 = 13$$

$$\text{rešenje: } (a) M\left(\frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right), N(-1, 0), (b) M(0, -1), N(5, 4)$$

10. Prava  $3x + y - 6 = 0$  seče kružnicu  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ . Odrediti dužinu tetive koju određuju data prava i data kružnica.

$$\text{rešenje: } \sqrt{10}$$

11. Odrediti parametar  $m$  tako da kružnica  $(x-2m)^2 + (y-m)^2 = 25$  sadrži tačku  $M(6, 4)$ .

$$\text{rešenje: } m = \frac{27}{5} \vee m = 1$$

12. Naći jednačinu kružnice čiji je centar tačka  $O(1, 2)$  i koja dodiruje pravu  $x - y - 1 = 0$ .

rešenje :  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$

13. Za koju vrednost parametra  $k$  je prava  $y = kx + 3$  tangenta na kružnicu  $x^2 + y^2 = 1$

rešenje :  $k = \pm 2\sqrt{2}$

14. Odrediti vrednost parametra  $B$  tako da prava  $x + By + 1 = 0$  bude tangenta na kružnicu  $x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0$

rešenje :  $B = \pm 1$

15. Odrediti jednačinu tangente na kružnicu  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$  u tački  $M(2, 1)$ .

rešenje :  $y = x - 1$

16. Iz date tačke  $A$  van kružnice  $k$  povučene su tangente na tu kružnicu. Napisati njihove jednačine:

(a)  $A\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right), k : x^2 + y^2 = 5$

(b)  $A(1, 6), k : x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$

rešenje : (a)  $x - 2y - 5 = 0, 2x - y - 5 = 0$ , (b)  $2x + y - 8 = 0, x - 2y + 11 = 0$

17. Naći jednačine tangenti na kružnicu  $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$  koje su paralelne pravoj  $2x + y - 7 = 0$ .

rešenje :  $2x + y - 1 = 0, 2x + y + 19 = 0$

18. Naći jednačine tangenti na kružnicu  $x^2 + y^2 - 2x + 4x = 0$  koje su normalne na pravu  $x - 2y + 9 = 0$ .

rešenje :  $2x + y - 5 = 0, 2x + y + 5 = 0$

19. Pod kojim uglom se seku prava  $y = 3x - 1$  i kružnica  $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ ?

rešenje :  $\varphi = 45^\circ$

20. Pod kojim uglom se seku prava  $y + 3 = 0$  i kružnica  $x^2 + y^2 = 10$ ?

rešenje :  $\varphi = \arctg \frac{1}{3}$

21. Pod kojim uglom se vidi kružnica  $x^2 + y^2 = 10$  iz tačke  $A(4, 2)$ ?

rešenje :  $\varphi = 90^\circ$

22. Date su kružnica  $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$  i prava  $x - 3y - 6 = 0$ . U presečnim tačkama date prave i date kružnice konstruisati tangente i odrediti površinu trougla koji obrazuju data prava i dobijene tangente.

rešenje :  $P = \frac{5}{2}$

## Elipsa

23. Data je jednačina elipse  $3x^2 + 4y^2 = 12$ . Odrediti poluose, žiže i ekscentricitet te elipse.

rešenje :  $a = 2, b = \sqrt{3}, F_1(-1, 0), F_2(1, 0), e = \frac{1}{2}$

24. Neka je  $a$  velika poluosa,  $b$  mala polusa, žiža  $F_2(c, 0)$  i  $e$  ekscentricitet elipse. Odrediti jednačinu elipse, ako znamo:

(a)  $a = 6, b = 4$  (b)  $a + b = 25, c = 5$  (c)  $a = 6, c = 4$

(d)  $c = 5, b = 5$  (e)  $e = \frac{1}{2}, c = 4$  (f)  $e = \frac{\sqrt{3}}{3}, a = 3$

rešenje:

$$(a) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (b) \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1 \quad (c) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$
$$(d) \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad (e) \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1 \quad (f) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

25. Naći jednačinu elipse koja sadrži tačke:

$$(a) A(4, 3), B(6, 2) \quad (b) A(4, -\sqrt{3}), B(2\sqrt{2}, 3)$$

rešenje: (a)  $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$ , (b)  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{10} = 1$

26. Naći jednačinu elipse ako je poznato:

- (a) tačka elipse  $A(2\sqrt{5}, 2)$  i njena mala poluosa  $b = 3$ ,
- (b) tačka  $A(2, -2)$  elipse i njena velika poluosa  $a = 4$ ,
- (c) tačka  $A(\sqrt{15}, 1)$  elipse i rastojanje među žižama  $2c = 8$
- (d) tačka  $A(2, \frac{5}{3})$  elipse i žiža  $F_2(\frac{2}{3}, 0)$

rešenje:

$$(a) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (b) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1 \quad (c) \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (d) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

## Hiperbola

27. Data je hiperbola  $4x^2 - 9y^2 = 36$ . Odrediti poluose, žiže i jednačine asimptota te hiperbole.

rešenje:  $a = 3, b = 2, F_1(-\sqrt{13}, 0), F_2(\sqrt{13}, 0), y = \pm \frac{2}{3}x$

28. Odrediti jednačinu hiperbole ako je poznato:

- (a) realna poluosa  $a = 6$ , imaginarna poluosa  $b = 4$ ,
- (b) rastojanje između žiža je  $2c = 10$ , imaginarna poluosa  $b = 3$ ,
- (c) jednačine njenih asimptota  $y = \pm \frac{4}{3}x$ , rastojanje između žiža  $20$ ,
- (d) poluosa  $a = 8$ , koeficijent pravca asiptote  $\frac{b}{a} = \frac{5}{4}$ .

rešenje:

$$(a) \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (b) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad (c) \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1 \quad (d) \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{100} = 1$$

29. Naći jednačinu hiperbole koja sadrži tačke  $A(6, -1), B(-8, 2\sqrt{2})$ .

rešenje:  $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$

30. Odrediti jednačinu hiperbole ako:

- (a) sadrži tačku  $A(-5, 3)$  i ima ekscentricitet  $e = \frac{3}{2}$
- (b) sadrži tačku  $A(5, 2)$  i ima asimptotu  $y = \pm \frac{1}{2}x$

rešenje: (a)  $\frac{x^2}{89} - \frac{y^2}{4} = 1$ , (b)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

## Prava i krive drugog reda

31. Odrediti jednačine tangenti povučene iz tačke  $A(-6, 3)$  na elipsu  $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$

rešenje:  $y = 3, 12x + 7y + 51 = 0$

32. Odrediti jednačinu prave koja dodiruje elipsu  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$  u tački  $D(2, -3)$

rešenje:  $x - 2y - 8 = 0$

33. Odrediti jednačine tangenti elipse  $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$  koje su paralelne sa pravom  $2x - y + 17 = 0$

rešenje:  $2x - y + 12 = 0, 2x - y - 12 = 0$

34. Napisati jednačinu tangente elipse  $x^2 + 3y^2 = 16$  u njenoj tački  $A(x > 0, 2)$

rešenje:  $x + 3y - 8 = 0$

35. Napisati jednačine tangenti elipse  $x^2 + 4y^2 = 20$ , ako su tangente normalne na pravu  $-x + y - 2 = 0$

rešenje:  $y = -x + 5, y = -x - 5$

36. Odrediti  $p$  tako da prava  $x + 2y - p = 0$  bude tangenta elipse  $x^2 + 2y^2 = 12$ .

rešenje:  $p = \pm 6$

37. Odrediti ugao pod kojim se elipsa  $x^2 + 3y^2 = 12$  vidi iz tačke  $P(0, 4)$ .

rešenje:  $90^\circ$

38. Odrediti jednačinu elipse, ako su prave  $x + y - 8 = 0$  i  $x + 3y + 16 = 0$  njene tangente.

rešenje:  $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$

39. Odrediti presečne tačke hiperbole  $3x^2 - y^2 = 3$  i prave  $y = 3x + 3$  i napisati jednačine tangenti hiperbole u tim tačkama.

rešenje: Presečne tačke su  $A(-1, 0)$  i  $B(-2, -3)$ , a jednačine tangenti  $x = -1, y = 2x + 1$

40. Odrediti vrednost parametra  $m$  tako da prava

(a)  $x - y - m - 1 = 0$ , (b)  $mx - 3y = 0$

bude tangenta hiperbole  $3x^2 - 4y^2 = 36$

rešenje: (a)  $m = -1 \pm \sqrt{3}$ , (b)  $m = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

41. Napisati jednačine tangenti hiperbole  $3x^2 - 4y^2 = 72$  koje su paralelne pravoj  $3x + 2y + 1 = 0$ .

rešenje:  $y = -\frac{3}{2}x - 6, y = -\frac{3}{2}x + 6$

42. Napisati jednačine tangenti hiperbole  $x^2 - 5y^2 = 20$  koje su normalne na pravu  $-x + y - 7 = 0$ .

rešenje:  $y = -x + 4, y = -x - 4$

43. Napisati jednačinu hiperbole ako su prave  $2x - y - 1 = 0$  i  $7x - 4y - 1 = 0$  njene tangente.

rešenje:  $3x^2 - y^2 = 3$

44. Pod kojim se uglom vidi hiperbola  $3x^2 - y^2 = 3$  iz tačke  $T(5, 9)$ ?

rešenje:  $\alpha = \arctg \frac{1}{18}$

45. Prava  $x + y = 3$  je tangenta elipse  $a^2x^2 + 4y^2 = 4a^2$ . Odrediti vrednost parametra  $a$ .

rešenje:  $a = \sqrt{5}$

46. Odrediti vrednost realnog parametra  $k$  tako da prava  $kx - 3y - 24 = 0$  bude tangenta hiperbole  $x^2 - y^2 = 36$ .

rešenje:  $k = \pm 5$