

---

## Izvod složene funkcije

1. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$\begin{aligned} (a) y &= (1-x^2)^3 & (b) y &= (1+x^3)^5 & (c) y &= \sqrt{1+x^3} \\ (d) y &= \sqrt{(x^2-x+1)^5} & (e) y &= \sqrt[3]{x^4+3x^2} & (f) y &= \left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)^4 \\ (g) y &= \left(\frac{2x+3}{5x-1}\right)^{-4} & (h) y &= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & (i) y &= \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}} \end{aligned}$$

rešenje:

$$\begin{aligned} (a) y' &= -6x(1-x^2)^2 & (b) y' &= 15x^2(1+x^3)^4 & (c) y' &= \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} \\ (d) y' &= \frac{5}{2}(2x-1)\sqrt{(x^2-x+1)^3} & (e) y' &= \frac{4x^3+6x}{3\sqrt[3]{(x^4+3x^2)^2}} & (f) y' &= \left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)^3 \cdot \frac{44}{(5x+2)^2} \\ (g) y' &= \left(\frac{2x+3}{5x-1}\right)^{-5} \cdot \frac{68}{(5x-1)^2} & (h) y' &= -\frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} & (i) y' &= -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}} \end{aligned}$$

2. Data je funkcija  $f(x) = \sqrt{(x^2+x+2)^3}$ . Odrediti  $f'(1)$ .

rešenje:  $f'(x) = \frac{3}{2}(2x+1)\sqrt{x^2+x+2}$ ,  $f'(1) = 9$ .

3. Data je funkcija  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ . Odrediti  $f'(2)$ .

rešenje:  $f'(2) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

4. Data je funkcija  $f(x) = (1-2\sqrt{x})^4$ . Odrediti  $f'(1)$ .

rešenje:  $f'(1) = 4$ .

5. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$\begin{aligned} (a) y &= \cos^2 x & (b) y &= \cos x^2 & (c) y &= \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x \\ (d) y &= \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x & (e) y &= 3 \sin(3x+5) & (f) y &= \operatorname{tg} \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

rešenje:

$$\begin{aligned} (a) y' &= -\sin 2x & (b) y' &= -2x \sin x^2 & (c) y' &= \operatorname{tg}^4 x \\ (d) y' &= -\sin^3 x & (e) y' &= 9 \cos(3x+5) & (f) y' &= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}} \end{aligned}$$

6. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$\begin{aligned} (a) y &= \ln(1-2x) & (b) y &= \ln(x^2-4x) & (c) y &= \ln \sin x \\ (d) y &= \ln \operatorname{tg} x & (e) y &= \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x + \ln \cos x & (f) y &= \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln \cos x \\ (g) y &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x & (h) y &= \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} & (i) y &= \sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1}) \end{aligned}$$

rešenje:

$$(a) y' = -\frac{2}{1-2x} \quad (b) y' = \frac{2x-4}{x^2-4x} \quad (c) y' = \operatorname{ctg} x$$

$$(d) y' = \frac{2}{\sin 2x} \quad (e) y' = \operatorname{ctg} 2x \quad (f) y' = \operatorname{tg}^5 x$$

$$(g) y' = \operatorname{tg}^3 x \quad (h) y' = -\frac{1}{\cos x} \quad (i) y' = \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$$

7. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$(a) y = \arcsin \frac{x}{2} \quad (b) y = \arcsin 2x \quad (c) y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

$$(d) y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \quad (e) y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \quad (f) f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

$$(g) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (h) y = \sqrt{4x-x^2} + 4 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} \quad (i) y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$$

rešenje:

$$(a) y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (b) y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \quad (c) y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(d) y' = \frac{2}{1+x^2} \quad (e) y' = \frac{x^2}{1-x^4} \quad (f) y' = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(g) y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (h) y' = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{4-x} \quad (i) y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$$

8. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$(a) y = e^{x^2-5x} \quad (b) y = e^{5x} \quad (c) y = e^{-x^2+4x-7}$$

$$(d) y = e^{\sqrt{x^2-3}} \quad (e) y = e^{-x} \quad (f) y = 1 - e^{-2x}$$

rešenje:

$$(a) y' = (2x-5)e^{x^2-5x} \quad (b) y' = 5e^{5x} \quad (c) y' = (-2x+4)e^{-x^2+4x-7}$$

$$(d) y' = \frac{x e^{\sqrt{x^2-3}}}{\sqrt{x^2-3}} \quad (e) y' = -e^{-x} \quad (f) y' = 2e^{-2x}$$

## Izvodi višeg reda

9. Odrediti drugi izvod sledećih funkcija:

$$(a) y = x^5 - 3x^4 + x \quad (b) y = \frac{1}{x} \quad (c) y = e^x \sin x$$

$$(d) y = \frac{1-x}{1+x} \quad (e) y = \ln \sin x \quad (f) y = \operatorname{arctg} x$$

rešenje:

$$(a) y'' = 20x^3 - 36x^2 \quad (b) y'' = -\frac{2}{x^3} \quad (c) y'' = 2e^x \cos x$$

$$(d) y'' = \frac{4}{(1+x)^3} \quad (e) y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \quad (f) y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

10. Odrediti treći izvod sledećih funkcija:

$$(a) y = x^5 - 2x^4 + 3x \quad (b) y = \frac{2}{x} \quad (c) y = e^{2x+3}$$

$$(d) y = x^2 \ln x \quad (e) y = \cos^2 x \quad (f) y = \ln(x-2)$$

rešenje:

$$(a) y''' = 60x^2 - 48x \quad (b) y''' = -\frac{12}{x^4} \quad (c) y''' = 8e^{2x+3}$$

$$(d) y''' = \frac{2}{x} \quad (e) y''' = 4 \sin 2x \quad (f) y''' = \frac{2}{(x-2)^3}$$

11. Data je funkcija  $f(x) = e^x \sin x$ . Dokazati da važi:  $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$ .

12. Data je funkcija  $f(x) = 2x^2 - 1$ . Dokazati da važi:  $(x^2 - 1)f''(x) + xf'(x) - 4f(x) = 0$ .

13. Data je funkcija  $f(x) = x^3 \ln x$ . Odrediti  $f^{(IV)}(2)$ .

rešenje:  $f^{(IV)}(x) = \frac{6}{x}$ ,  $f^{(IV)}(2) = 3$

14. Data je funkcija  $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$ . Odrediti  $f^{(IV)}(1)$ .

rešenje:  $f^{(IV)}(x) = 360x^2$ ,  $f^{(IV)}(1) = 360$

15. Data je funkcija  $f(x) = a \sin 2x$ , gde je  $a \in \mathbb{R}$ . Odrediti  $f^{(IV)}(\frac{\pi}{12})$ .

rešenje:  $f^{(IV)}(x) = 16a \sin 2x$ ,  $f^{(IV)}(\frac{\pi}{12}) = 8a$

16. Data je funkcija  $f(x) = Ae^x - Be^{-x}$ , gde su  $A$  i  $B$  proizvoljni realni brojevi. Dokazati da je  $f''(x) = f(x)$ .

17. Data je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(6 - 3a)x^2 - 2(a + 4)x + 8, \text{ gde } a \in \mathbb{R}. \text{ Odrediti broj } a \text{ tako da važi jednakost}$$

$$\frac{1}{f(0)}(f''(-2) - f'(-1)) = -0.125$$

rešenje:  $a = 1$

18. Dokazati da funkcija  $f(x) = A \sin(mx + n) + B \cos(mx + n)$ , gde su  $A, B, m, n$  konstante, zadovoljava jednačinu  $f''(x) + m^2 f(x) = 0$ .

19. Dokazati da funkcija  $f(x) = \cos e^x + \sin e^x$  zadovoljava jednačinu  $f''(x) - f'(x) + e^{2x} f(x) = 0$ .

## Primena izvoda

### Lopitalovo pravilo

20. Primenom Lopitalovog pravila izračunati granične vrednosti

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{e^x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{5x^2 - x^3}$$

rešenje: (a) 1, (b) 10, (c) 0, (d) 0, (e)  $\frac{1}{5}$

21. Odrediti granične vrednosti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 2 \cos x + 1}{x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln(1 + \frac{1}{x})}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}$$

rešenje: (a)  $-1$ , (b)  $2$ , (c)  $\frac{2}{5}$ , (d)  $2$ , (e)  $\infty$

## Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije

22. Ispitati monotonost i odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$(a) f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(b) f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$$

$$(d) f(x) = x\sqrt{x+3}$$

$$(e) f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(f) f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$$

$$(g) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$(h) y = x^2 \ln x$$

$$(i) y = (x-1) \ln^2(x-1)$$

$$(j) y = (2+x^2)e^{-x^2}$$

$$(k) f(x) = (3-x^2)e^{-x}$$

$$(l) f(x) = \frac{e^x}{x}$$

rešenje:

$$(a) D_f : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty), \quad f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ ,  $A_{\min}(0, 1)$

$$(b) D_f : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty), \quad f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-3, -1)$ ,  $A_{\max}(-3, -\frac{27}{8})$

$$(c) D_f : x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty), \quad f'(x) = -\frac{x^2(x^2-9)}{(3-x^2)^2}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$ , opadajuća za  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ ,  $A_{\min}(-3, \frac{9}{2})$ ,  $B_{\max}(3, -\frac{9}{2})$

$$(d) f'(x) = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$$

$D_f : x \in [-3, \infty)$ , funkcija je rastuća za  $x \in (-2, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-3, -2)$ ,  $A_{\min}(-2, -2)$

$$(e) D_f : x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-\frac{1}{3}, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-\infty, -\frac{1}{3})$ ,  $A_{\min}(-\frac{1}{3}, -\sqrt{10})$

$$(f) D_f : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-1, 1)$ ,  $A_{\min}(1, 1)$

$$(g) D_f : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, f'(x) = \frac{2x}{-2x^4 + 2x^2 - 1}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ , opadajuća za  $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ ,  $A_{\max}(0, 0)$

$$(h) D_f : x \in (0, \infty), y' = 2x \ln x + x$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$ ,  $A_{\min}(e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2e})$

$$(i) D_f : x \in (1, \infty), y' = \ln(x-1) \cdot (\ln(x-1) + 2)$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (1, 1+e^{-2}) \cup (2, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (1+e^{-2}, 2)$ ,  $A_{\max}(1+e^{-2}, \frac{4}{e^2})$ ,  $B_{\min}(2, 0)$

$$(j) y' = -2e^{-x^2} \cdot x \cdot (x^2 + 1)$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-\infty, 0)$ , opadajuća za  $x \in (0, \infty)$ ,  $A_{\max}(0, 2)$

$$(k) f'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 3)$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-1, 3)$ ,  $A_{\max}(-1, 2e)$ ,  $B_{\min}(3, -\frac{6}{e^3})$

$$(l) D_f : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Funkcija je rastuća za  $x \in (1, \infty)$ , opadajuća za  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ ,  $A_{\min}(1, e)$

23. Odrediti najmanju i najveću vrednost

(a) funkcije  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$  na intervalu  $[-1, 2]$

(b) funkcije  $f(x) = x^2 - 4x + 7$  na intervalu  $[1, 4]$

(c) funkcije  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$  na intervalu  $[-5, 5]$

(d) funkcije  $f(x) = e^x + e^{-x}$  na intervalu  $[-1, 2]$

rešenje: (a) Najmanja vrednost se dostiže za  $x = -1$  i  $f(-1) = -5$ , a najveća za  $x = 2$  i iznosi  $f(2) = 4$ ;

(b) najmanja vrednost je 3, a najveća 7;

(c) najmanja vrednost je  $-86$ , a najveća 400;

(d) najmanja vrednost je 2, a najveća  $e^2 + 1/e^2$