

Izvod funkcije

1. Odrediti izvod sledećih funkcije

$$(a) y = x^3 - x + 1 \quad (b) y = 3x^4 - 2x^2 + 3x - 6 \quad (c) y = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - 2x + 3$$
$$(d) y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{3} \quad (e) y = \sqrt[4]{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3} + \pi \quad (f) y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x^5} + 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \log 2$$

rešenje:

$$(a) 3x^2 - 1 \quad (b) 12x^3 - 4x + 3 \quad (c) -\frac{3}{x^4} - \frac{8}{x^3} - 2$$
$$(d) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (e) y' = \frac{1}{4\sqrt[3]{x^3}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4} \quad (f) y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 5\sqrt{x^3} + \frac{2}{3\sqrt{x^2}} - \frac{6}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

2. Odrediti izvod sledećih funkcije

$$(a) y = x^3 + 3^x \quad (b) y = \sin x - \cos x \quad (c) y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$$
$$(d) y = 2e^x - \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x \quad (e) y = e^x + \ln x - \sqrt{x} \quad (f) y = \ln x - \log_2 x + 4e^x$$

rešenje:

$$(a) y' = 3x^2 + 3^x \ln 3 \quad (b) y' = \cos x - \sin x \quad (c) y' = 0$$
$$(d) y' = 2e^x - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} \quad (e) y' = e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (f) y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln 2} + 4e^x$$

3. Odrediti izvod proizvoda funkcija

$$(a) y = x(2x^3 + 3x) \quad (b) y = (x-1)(5x^6 - 4x^3 + 1) \quad (c) y = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 1)$$

rešenje:

$$(a) y' = 8x^3 + 6x \quad (b) y' = 1 + 12x^2 - 16x^3 - 30x^5 + 35x^6 \quad (c) y' = 2 + 4x - 6x^2 + 4x^3$$

4. Odrediti izvod proizvoda funkcija

$$(a) y = (x^2 + 3x - 9)e^x \quad (b) y = x^5 e^x \quad (c) y = x^4 \ln x$$
$$(d) y = x^3 \log_8 x \quad (e) y = x \log_6 x \quad (f) y = (2x^2 - 1)(\ln x - 2)$$

rešenje:

$$(a) y' = (x^2 + 5x - 6)e^x \quad (b) y' = e^x x^4 (5 + x) \quad (c) y' = x^3 (1 + 4 \ln x)$$
$$(d) y' = 3x^2 \log_8 x + \frac{x^2}{\ln 8} \quad (e) y' = \log_6 x + \frac{1}{\ln 6} \quad (f) y' = -\frac{1}{x} - 6x + 4x \ln x$$

5. Odrediti izvod proizvoda funkcija

$$(a) y = e^x \cos x \quad (b) y = (2x^2 - x + 1) \sin x \quad (c) y = x \operatorname{ctg} x$$
$$(d) y = e^x \operatorname{arctg} x \quad (e) y = e^x \operatorname{arcsin} x \quad (f) y = \sin x (1 - \cos x)$$

rešenje:

$$(a) y' = e^x (\cos x - \sin x) \quad (b) y' = (1 - x + 2x^2) \cos x + (4x - 1) \sin x \quad (c) y' = \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$$
$$(d) y' = e^x \left(\frac{1}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \right) \quad (e) y' = e^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arcsin} x \right) \quad (f) y' = \cos x - \cos 2x$$

6. Odrediti izvod količnika funkcija

$$(a) y = \frac{x}{300-x} \quad (b) y = \frac{3x-1}{2x+5} \quad (c) y = \frac{x^2+1}{x^3-1}$$
$$(d) y = \frac{3x^2-5x}{x^8} \quad (e) y = \frac{4x+3}{\sqrt{x}} \quad (f) y = \frac{6x^2-3x}{3\sqrt{x}}$$

rešenje:

$$(a) y' = \frac{300}{(x-300)^2} \quad (b) y' = \frac{17}{(2x+5)^2} \quad (c) y' = -\frac{x^4+3x^2+2x}{(x^3-1)^2}$$
$$(d) y' = \frac{35-18x}{x^8} \quad (e) y' = \frac{4x-3}{2x\sqrt{x}} \quad (f) y' = \frac{6x-1}{2\sqrt{x}}$$

7. Odrediti izvod količnika funkcija

$$(a) y = \frac{1+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x} \quad (b) y = \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} \quad (c) y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$
$$(d) y = \frac{\ln x - 1}{\ln x} \quad (e) y = \frac{\ln x}{\ln x - 2} \quad (f) y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$$
$$(g) y = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x} \quad (h) y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \quad (i) y = \frac{\ln x}{1+x^2}$$

rešenje:

$$(a) y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (b) y' = \frac{1}{1-\sin 2x} \quad (c) y' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$$
$$(d) y' = \frac{1}{x \ln^2 x} \quad (e) y' = -\frac{2}{x(\ln x - 2)^2} \quad (f) y' = \frac{\pi}{(\arccos x)^2 \sqrt{1-x^2}}$$
$$(g) y' = \frac{2x}{\operatorname{arctg} x} - \frac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2} \quad (h) y' = -\frac{2}{x(\ln x + 1)^2} \quad (i) y' = \frac{1+x^2-2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2}$$

8. Odrediti izvod funkcije

$$(a) y = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2} \quad (b) y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$$
$$(c) y = e^x \sin x + x \cos x \quad (d) y = x \operatorname{arctg} x - (x-1) \operatorname{arctg} x$$

rešenje:

$$(a) y' = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \quad (b) y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$$
$$(c) y' = (1 + e^x) \cos x + (e^x - x) \sin x \quad (d) y' = \frac{2x-1}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$$

9. Data je funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Odrediti $f'(2)$, $f'(-1)$. (rešenje: $f'(2) = -\frac{3}{25}$, $f'(-1) = 0$)

10. Data je funkcija $f(x) = 3 \arcsin x - 2 \arccos x$. Odrediti $f'(\frac{3}{5})$ (rešenje: $f'(\frac{3}{5}) = -\frac{3}{25}$)

11. Date su funkcije

$$f(x) = \frac{ax}{a+x}, \quad g(x) = ax^3 - (a-1)x^2, \quad a \in \mathbb{R}$$

Rešiti jednačinu $f'(x) = g'(x) + \frac{a^2}{(a+x)^2}$

rešenje: $x = 0$, $x = \frac{2(1-a)}{3a}$

12. Data je funkcija

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{a+2}{2}x^2 + 3ax + a, \quad \text{gde } a \in \mathbb{R}.$$

Odrediti sve realne vrednosti x za koje je $f'(x) = a$

rešenje: $x = 2$, $x = a$

Tangente i normale grafika funkcije $f(x)$

1. Odrediti jednačine tangente grafika funkcije $f(x)$ u tački A

$$(a) f(x) = x^3 - 2x + 1, A(2, y_0) \quad (b) f(x) = x^2 - \sqrt{x}, A(1, y_0) \quad (c) f(x) = \frac{8}{x^2+4}, A(x_0 < 0, 1)$$
$$(d) f(x) = x^2 + \frac{3}{x-1}, A(2, y_0) \quad (e) f(x) = \frac{6x}{x^2-1}, A(x_0 > 0, 4) \quad (f) f(x) = x + \frac{4}{x}, A(x > 2, 4)$$

rešenje:

$$(a) y = 10x - 15 \quad (b) y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \quad (c) y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$(d) y = x + 5 \quad (e) y + 6x - 16 = 0 \quad (f) y = \frac{3}{4}x + 2$$

2. Odrediti jednačinu normale grafika funkcije $f(x)$ u tački A

$$(a) f(x) = 2x^2 - 4x + 5, A(3, y_0) \quad (b) f(x) = \frac{5x^2}{1+x^2}, A(x_0 > 0, 4) \quad (c) f(x) = x \cdot \ln x, A(1, y_0)$$

rešenje:

$$(a) 8y + x - 91 = 0 \quad (b) 5x + 4y - 26 = 0 \quad (c) y = -x + 1$$

Izvod složene funkcije

3. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$(a) y = (1 - x^2)^3 \quad (b) y = (1 + x^3)^5 \quad (c) y = \sqrt{1 + x^3}$$
$$(d) y = \sqrt{(x^2 - x + 1)^5} \quad (e) y = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2} \quad (f) y = \left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)^4$$
$$(g) y = \left(\frac{2x+3}{5x-1}\right)^{-4} \quad (h) y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (i) y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$$

rešenje:

$$(a) y' = -6x(1 - x^2)^2 \quad (b) y' = 15x^2(1 + x^3)^4 \quad (c) y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$$
$$(d) y' = \frac{5}{2}(2x - 1)\sqrt{(x^2 - x + 1)^3} \quad (e) y' = \frac{4x^3 + 6x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^4 + 3x^2)^2}} \quad (f) y' = \left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)^3 \cdot \frac{44}{(5x+2)^2}$$
$$(g) y' = \left(\frac{2x+3}{5x-1}\right)^{-5} \cdot \frac{68}{(5x-1)^2} \quad (h) y' = -\frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (i) y' = -\frac{2x}{3 \sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$$

4. Data je funkcija $f(x) = \sqrt{(x^2 + x + 2)^3}$. Odrediti $f'(1)$.

rešenje: $f'(x) = \frac{3}{2}(2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 2}$, $f'(1) = 9$.

5. Data je funkcija $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. Odrediti $f'(2)$.

rešenje: $f'(2) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Data je funkcija $f(x) = (1 - 2\sqrt{x})^4$. Odrediti $f'(1)$.

rešenje: $f'(1) = 4$.

7. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$(a) y = \cos^2 x \quad (b) y = \cos x^2 \quad (c) y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$$
$$(d) y = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \quad (e) y = 3 \sin(3x + 5) \quad (f) y = \operatorname{tg} \frac{x+1}{2}$$

rešenje:

$$(a) y' = -\sin 2x \quad (b) y' = -2x \sin x^2 \quad (c) y' = \operatorname{tg}^4 x$$
$$(d) y' = -\sin^3 x \quad (e) y' = 9 \cos(3x + 5) \quad (f) y' = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}$$

8. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$(a) y = \ln(1 - 2x) \quad (b) y = \ln(x^2 - 4x) \quad (c) y = \ln \sin x$$
$$(d) y = \ln \operatorname{tg} x \quad (e) y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x + \ln \cos x \quad (f) y = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln \cos x$$
$$(g) y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x \quad (h) y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \quad (i) y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$$

rešenje:

$$(a) y' = -\frac{2}{1-2x} \quad (b) y' = \frac{2x-4}{x^2-4x} \quad (c) y' = \operatorname{ctg} x$$

$$(d) y' = \frac{2}{\sin 2x} \quad (e) y' = \operatorname{ctg} 2x \quad (f) y' = \operatorname{tg}^5 x$$

$$(g) y' = \operatorname{tg}^3 x \quad (h) y' = -\frac{1}{\cos x} \quad (i) y' = \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$$

9. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$(a) y = \arcsin \frac{x}{2} \quad (b) y = \arcsin 2x \quad (c) y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

$$(d) y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \quad (e) y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \quad (f) f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

$$(g) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (h) y = \sqrt{4x - x^2} + 4 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} \quad (i) y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$$

rešenje:

$$(a) y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (b) y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \quad (c) y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(d) y' = \frac{2}{1+x^2} \quad (e) y' = \frac{x^2}{1-x^4} \quad (f) y' = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(g) y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (h) y' = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{4-x} \quad (i) y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$$

10. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija

$$(a) y = e^{x^2-5x} \quad (b) y = e^{5x} \quad (c) y = e^{-x^2+4x-7}$$

$$(d) y = e^{\sqrt{x^2-3}} \quad (e) y = e^{-x} \quad (f) y = 1 - e^{-2x}$$

rešenje:

$$(a) y' = (2x - 5) e^{x^2-5x} \quad (b) y' = 5 e^{5x} \quad (c) y' = (-2x + 4) e^{-x^2+4x-7}$$

$$(d) y' = \frac{x \cdot e^{\sqrt{x^2-3}}}{\sqrt{x^2-3}} \quad (e) y' = -e^{-x} \quad (f) y' = 2 e^{-2x}$$

Izvodi višeg reda

11. Odrediti drugi izvod sledećih funkcija:

$$(a) y = x^5 - 3x^4 + x \quad (b) y = \frac{1}{x} \quad (c) y = e^x \sin x$$

$$(d) y = \frac{1-x}{1+x} \quad (e) y = \ln \sin x \quad (f) y = \operatorname{arctg} x$$

rešenje:

$$(a) y'' = 20x^3 - 36x \quad (b) y'' = -\frac{2}{x^3} \quad (c) y'' = 2e^x \cos x$$

$$(d) y'' = \frac{4}{(1+x)^3} \quad (e) y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \quad (f) y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

12. Odrediti treći izvod sledećih funkcija:

$$(a) y = x^5 - 2x^4 + 3x \quad (b) y = \frac{2}{x} \quad (c) y = e^{2x+3}$$

$$(d) y = x^2 \ln x \quad (e) y = \cos^2 x \quad (f) y = \ln(x-2)$$

rešenje:

$$(a) y''' = 60x^2 - 48x \quad (b) y''' = -\frac{12}{x^4} \quad (c) y''' = 8e^{2x+3}$$

$$(d) y''' = \frac{2}{x} \quad (e) y''' = 4 \sin 2x \quad (f) y''' = \frac{2}{(x-2)^3}$$

13. Data je funkcija $f(x) = e^x \sin x$. Dokazati da važi: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$.

14. Data je funkcija $f(x) = 2x^2 - 1$. Dokazati da važi: $(x^2 - 1)f''(x) + xf'(x) - 4f(x) = 0$.

15. Data je funkcija $f(x) = x^3 \ln x$. Odrediti $f^{(IV)}(2)$.

rešenje: $f^{(IV)}(x) = \frac{6}{x}$, $f^{(IV)}(2) = 3$

16. Data je funkcija $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$. Odrediti $f^{(IV)}(1)$.

rešenje: $f^{(IV)}(x) = 360x^2$, $f^{(IV)}(1) = 360$

17. Data je funkcija $f(x) = a \sin 2x$, gde je $a \in R$. Odrediti $f^{(IV)}(\frac{\pi}{12})$.

rešenje: $f^{(IV)}(x) = 16a \sin 2x$, $f^{(IV)}(\frac{\pi}{12}) = 8a$

18. Data je funkcija $f(x) = A e^x - B e^{-x}$, gde su A i B proizvoljni realni brojevi. Dokazati da je $f''(x) = f(x)$.

19. Data je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(6 - 3a)x^2 - 2(a + 4)x + 8, \text{ gde } a \in R. \text{ Odrediti broj } a \text{ tako da važi jednakost}$$

$$\frac{1}{f(0)}(f''(-2) - f'(-1)) = -0.125$$

rešenje: $a = 1$

20. Dokazati da funkcija $f(x) = A \sin(mx + n) + B \cos(mx + n)$, gde su A, B, m, n konstante, zadovoljava jednačinu $f''(x) + m^2 f(x) = 0$.

21. Dokazati da funkcija $f(x) = \cos e^x + \sin e^x$ zadovoljava jednačinu $f''(x) - f'(x) + e^{2x} f(x) = 0$.

Lopitalovo pravilo

22. Primenom Lopitalovog pravila izračunati granične vrednosti

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{e^x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{5x^2 - x^3}$$

rešenje: (a) 1, (b) 10, (c) 0, (d) 0, (e) $\frac{1}{5}$

23. Odrediti granične vrednosti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 2 \cos x + 1}{x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1 + x)}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\arcsin 5x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{\ln(1 + \frac{1}{x})}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}$$

rešenje: (a) -1, (b) 2, (c) $\frac{2}{5}$, (d) 2, (e) ∞