Ekonomske funkcije

1. Funkcija tražnje nekog proizvoda data je u obliku

$$(a)\, x = 8 - p, \quad (b)\, x = -p + 90$$

Odrediti količinu i cenu pri kojima je ukupan prihod pri prodaji ove robe maksimalan. Koliko iznosi maksimalan prihod?

rešenje:

(a) $P(p) = 8p - p^2$. Maksimalan prihod se ostvaruje po ceni $p = 4$,
za količinu $x = 4$ i $P_{\max} = P(4) = 16$ din.

(b) $P(p) = -p^2 + 90p$. Maksimalan prihod se ostvaruje po ceni $p = 45$,
za količinu $x = 45$ i $P_{\max} = 2025$ din.

2. Date su: funkcija prihoda $P(p) = -0.5\,p^2 + 8000\,p$ i funkcija ukupnih troškova proizvodnje $C(x) = 2x^2 + 10\,000\,000$. Odrediti optimalni obim proizvodnje i maksimalnu dobit.

rešenje:

$$P(p) = p\,x$$
$$-0.5\,p^2 + 8000\,p = p\,x \;/: p$$
$$-0.5\,p + 8000\,p = x \Longrightarrow p = -2x + 16000 \Longrightarrow P(x) = -2x^2 + 16000\,x$$

$$D(x) = P(x) - C(x) = -4x^2 + 16000\,x - 10\,000\,000$$
$$D'(x) = -8x + 16000 \Longrightarrow D'(x) = 0 \text{ za } x = 2000$$
$$D''(x) = -8 < 0 \Longrightarrow \text{maksimalna dobit se ostvaruje za } x = 2000 \text{ tj. } x_{\text{opt}} = 2000$$

$$D_{\max} = -4 \cdot 2000^2 + 16000 \cdot 2000 - 10\,000\,000 = 6\,000\,000$$

3. Date su: funkcija ukupnog prihoda $P(x) = -0.5\,x^2 + 100\,x$ i funkcija ukupnih troškova proizvodnje $C(x) = 1.5\,x^2 + 20\,x + 512$.
(a) Odrediti interval rentabilne proizvodnje
(b) Za koju će se proizvedenu i realizovanu količinu proizvoda ostvariti dobit u iznosu od 288 novčanih jedinica?

rešenje:

(a) $D(x) = P(x) - C(x) = -2x^2 + 80\,x - 512$. $D(x) > 0$ za $x \in (8, 32)$ pa je $x_{\text{rent}} \in (8, 32)$

(b) $D(x) = 288$ za $x = 20$

4. Date su: funkcija ukupnog prihoda $P(x) = -0.001\,x^2 + 80\,x$ i funkcija ukupnih troškova proizvodnje $C(x) = 30\,x + 10^5$. Odrediti optimalni obim proizvodnje i maksimalnu dobit preko fizičkog obima proizvodnje

rešenje:

$x_{\text{opt}} = 25000$ jedinica proizvoda, $D_{\max} = 525000$ novčanih jedinica

5. Data je funkcija tražnje $x = -2\,p + 12000$ i funkcija prosečnih troškova $\overline{C} = 2\,x - 4000 + \frac{1\,000\,000}{x}$. (a) Pri kojoj se ceni i količini prodate robe ostvaruje maksimalna dobit?, (b) Odrediti granice rentabiliteta.

rešenje:

$D(x) = -\frac{5}{2}\,x^2 + 10\,000\,x - 1\,000\,000$, (a) $x = 2000$, $p = 5000$, (b) $x_1 = 102.63$, $x_2 = 3897.37$.

6. Funkcija ukupnih troškova je $C = 30\,x + 10\,000$, a funkcija ukupnog prihoda $P = -\frac{x^2}{1000} + 80\,x$. Odrediti: ($a$) optimalnu proizvodnju, (b) maksimalnu dobit, (c) granice rentabiliteta za datu proizvodnju.

rešenje:

$D(x) = -\frac{x^2}{1000} + 50\,x - 10\,000.$
(a) optimalnu proizvodnju dobijamo iz uslova $D(x) = 0$ pa
je $x_{\text{opt}} = 25000$,
(b) $D_{\max} = 615\,000$, (c) $x_1 = 200.81$, $x_2 = 49799.12$.

7. Data je funkcija tražnje $x = -\frac{p}{3} + 98$ i funkcija ukupnih troškova $C = \frac{x^2}{2} + 1250$. Izračunati maksimalnu dobit.

rešenje:

$D(x) = -\frac{7}{2}\,x^2 + 294\,x - 1250$. Maksimalna dobit se postiže za $x = 42$ i iznosi $D_{\max} = 4924$.

8. Date su funkcija prosečnih troškova $\overline{C} = 3\,x + \frac{30}{x} + 50$ i funkcija ukupnog prihoda $P = -x^2 + 90\,x$. Odrediti: (a) cenu i količinu pri kojima se ostvaruje maksimalna dobit, (b) maksimalnu dobit.

rešenje:

$D(x) = -4\,x^2 + 40\,x - 30$, ($a$) $x = 5$, $p = 85$, (b) $D = 70$.

9. Funkcija ukupnih troškova je $C = 3\,x^2 + 25$, a funkcija prosečnih troškova je $x = -\frac{p}{2} + 15$.
Donja granica x_1 i gornja granica x_2 rentabilnosti i maksimalna dobit $D_{\max}$ koja se dobija, iznose:

rešenje:

$x = -\frac{p}{2} + 15 \Longrightarrow p = 30 - 2\,x$, pa je $P(x) = p\,x = (30 - 2\,x)\,x = 30\,x - 2\,x^2$.
$D(x) = -5\,x^2 + 30\,x - 25$, $D'(x) = 0$ za $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $D_{\max} = 20$

10. Funkcija prosečnih prihoda je $p = 5\,e^{-\frac{x}{2}+6}$ i funkcija prosečnih troškova je $\overline{C} = \frac{1000}{x}$.
Količina proizvodnje za koju je dobit maksimalna i ta maksimalna dobit su:

rešenje:

$P(x) = p\,x = 5\,x\;e^{-\frac{x}{2}+6}$, $C(x) = x\;\overline{C} = 1000$. $D(x) = 5\,x\;e^{-\frac{x}{2}+6} - 1000$,
$D'(x) = e^{-\frac{x}{2}+6}(5 - \frac{5}{2}\,x)$, $D'(x) = 0$ za $x = 2$, $D(2) = 10\,e^5 - 1000 = 484.132$.

11. Date su: funkcija tražnje $x = -200\,p + 40\,000$ i funkcija dobiti $D(x) = -0.015\,x^2 + 180\,x - 900$.
Za koliko su troškovi po jedinici proizvoda na nivou od 30 jedinica proizvoda veći od isto takvih troškova na nivou od 45 jedinica proizvoda?

rešenje:

$$P(x) = -0.005\,x^2 + 200\,x,\; C(x) = P(x) - D(x) = 0.01\,x^2 + 20\,x + 900,$$
$$\overline{C}(x) = 0.01\,x + 20 + \frac{900}{x},\; \overline{C}(30) = 50.3,\; \overline{C}(45) = 40.45,\; \overline{C}(30) - \overline{C}(45) = 9.85$$

Dakle, prosečni troškovi na nivou proizvodnje od 30 jedinica proizvoda veći su za 9.85 novčanih jedinica od isto takvih troškova na nivou proizvodnje od 45 jedinica proizvoda.