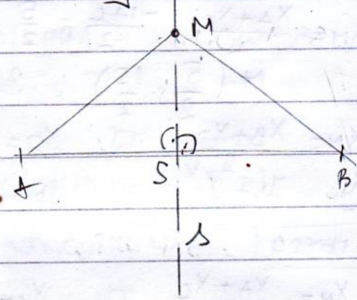
(1) (I) Свака тачка на симетрали дужи, подједнако је удаљена од њених крајева. Доказати.



Нека тачка $M \in s$ - симетрала.

$\triangle ASM, \triangle BSM$: $AS = BS$ (S је средиште)

$MS \equiv MS$

$$\underbrace{\measuredangle MSA = \measuredangle MSB = 90^\circ}$$

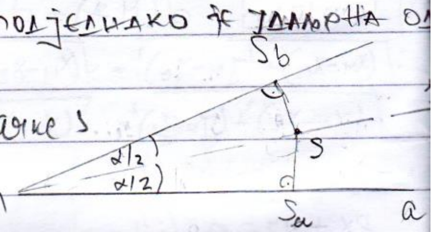
$\Downarrow$ СУС

$\triangle ASM \cong \triangle BSM$

$\Downarrow$

$AM \cong BM$ ■

(II) Свака тачка на симетрали угла, подједнако је удаљена од оба крака. Доказати.



Нека су S_a и S_b нормалне пројекције тачке S на крацима a и b.

$\triangle MSS_b, \triangle MSS_a$: $MS \equiv MS$

$\frac{\alpha}{2} = \measuredangle SMS_a = \measuredangle SMS_b$ (јер је MS симетрала угла)

$$\underbrace{\measuredangle MSS_a = \measuredangle MSS_b = 90 - \frac{\alpha}{2}}$$

$\Downarrow$ УСУ

$\triangle MSS_b \cong \triangle MSS_a$

$\Downarrow$

$SS_a = SS_b$ ■

(2) (I) Нека су α и β комплементни углови, γ и α суплементни, а δ суплементан са β. Наћи $\gamma+\delta$.

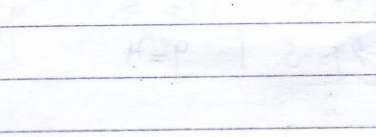
$\alpha+\beta=90^\circ \; /\cdot(-1)$

$\gamma+\alpha=180^\circ$

$\beta+\delta=180$

$\left.\begin{array}{l}\delta-\alpha=90^\circ \\ \gamma+\alpha=180\end{array}\right\} +$ $\quad \gamma+\delta=270^\circ$

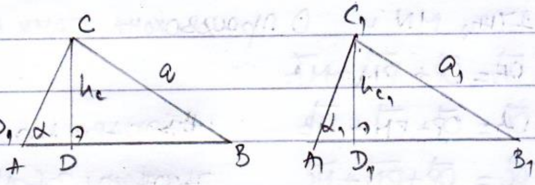
(II) Један од осам трансверзалних углова је $\frac{3}{5}R$, где је R - прав угао. Наћи осталих 7 углова.



Нека је $\alpha = \frac{3}{5}R = \gamma = \alpha_1 = \gamma_1$

$\beta = 2R - \frac{3}{5}R = \frac{7}{5}R = \delta = \beta_1 = \delta_1$

(3) (I) Доказати да је $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ ако је $a=a_1$, $\alpha=\alpha_1$, $h_c=h_{c_1}$



ΔCDB, $\Delta C_1D_1B_1$:

$$\left.\begin{array}{l} CD=C_1D_1 \ (h_c=h_{c_1}) \\ \measuredangle CDB=\measuredangle C_1D_1B_1=90^\circ \\ CB=C_1B_1 \ (a=a_1) \\ \measuredangle CBD, \measuredangle C_1B_1D_1 < 90^\circ \end{array}\right\} \overset{ССУ}{\Longrightarrow} \Delta CBD \cong \Delta C_1B_1D_1$$

$$\Downarrow$$

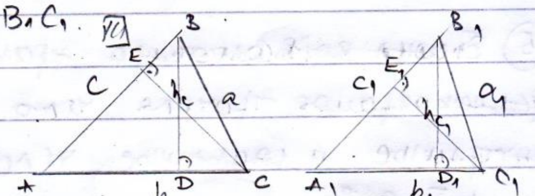
$$\measuredangle CBD = \measuredangle C_1B_1D_1$$
$$\measuredangle DCB = \measuredangle D_1C_1B_1$$

У ΔADC, $\Delta A_1D_1C_1$: $\measuredangle CAD = \measuredangle C_1A_1D_1$ $(\alpha=\alpha_1)$, па је:

$$\measuredangle ACD = 90-\alpha = 90-\alpha_1 = \measuredangle A_1C_1D_1$$

Из: $\measuredangle ACB = \measuredangle ACD + \measuredangle DCB = \measuredangle A_1C_1D_1 + \measuredangle D_1C_1B_1 = \measuredangle A_1C_1B_1$

Коначно је:
$$\left.\begin{array}{l} a=a_1 \\ \beta=\beta_1 \\ \gamma=\gamma_1 \end{array}\right\} \overset{УСУ}{\Longrightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1. \ \boxtimes$$



(II) $a=a_1$, $h_b=h_{b_1}$, $h_c=h_{c_1}$

ΔBDC, $\Delta B_1D_1C_1$:

$$\left.\begin{array}{l} BD=B_1D_1 \ (h_b=h_{b_1}) \\ BC=B_1C_1 \ (a=a_1) \\ \measuredangle BDC=\measuredangle B_1D_1C_1=90^\circ \\ \measuredangle BCD, \measuredangle B_1C_1D_1 < 90 \end{array}\right\} \overset{ССУ}{\Longrightarrow} \Delta BDC \cong \Delta B_1D_1C_1$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle BCA = \measuredangle B_1C_1A_1$$

ΔBEC, $\Delta B_1E_1C_1$:

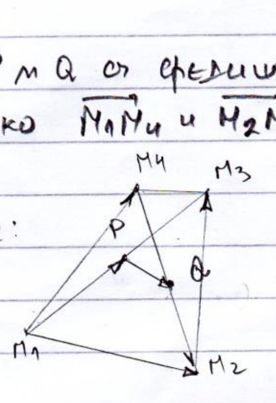
$$\left.\begin{array}{l} EC=E_1C_1 \ (h_c=h_{c_1}) \\ \measuredangle BEC=\measuredangle B_1E_1C_1=90^\circ \\ BC=B_1C_1 \ (a=a_1) \\ \measuredangle ABC, \measuredangle A_1B_1C_1 < 90^\circ \end{array}\right\} \overset{ССУ}{\Longrightarrow} \Delta BEC \cong \Delta B_1E_1C_1.$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle ABC = \measuredangle A_1B_1C_1$$

$$\left.\begin{array}{l} a=a_1 \\ \gamma=\gamma_1 \\ \beta=\beta_1 \end{array}\right\} \overset{УСУ}{\Longrightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1. \ \boxtimes$$

(4) (I) У четвороуглу $M_1M_2M_3M_4$, тачке P и Q су средишта дијагонала M_1M_3 и M_2M_4. Изразити $\vec{PQ}$ преко $\vec{M_1M_4}$ и $\vec{M_2M_3}$.



$$\vec{M_1M_2} = \vec{M_1P}+\vec{PQ}+\vec{QM_2} = \frac{1}{2}\vec{M_1M_3}+\vec{PQ}+\frac{1}{2}\vec{M_4M_2}$$

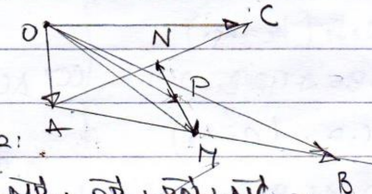
$\vec{M_1M_3} = \vec{M_1M_2}+\vec{M_2M_3}$, $\vec{M_4M_2} = \vec{M_4M_1}+\vec{M_1M_2}$; Биће:

$$\vec{M_1M_2} = \frac{1}{2}\vec{M_1M_2}+\frac{1}{2}\vec{M_2M_3}+\vec{PQ}+\frac{1}{2}\vec{M_4M_1}+\frac{1}{2}\vec{M_1M_2}$$

$$\cancel{\vec{M_1M_2}} = \cancel{\vec{M_1M_2}}+\frac{1}{2}\vec{M_2M_3}-\frac{1}{2}\vec{M_1M_4}+\vec{PQ}$$ Дакле,

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}\left(\vec{M_1M_4}-\vec{M_2M_3}\right)$$

(11) Нека су M и N редом средишта дужи AB и AC, P средиште дужи MN и O произвољна тачка. Доказати $2\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=4\cdot\vec{OP}$.



$\vec{OA}=\vec{OP}+\vec{PM}+\vec{MA}$

$\vec{OB}=\vec{OP}+\vec{PM}+\vec{MB}$ Направимо

$\vec{OC}=\vec{OP}+\vec{PN}+\vec{NC}$ тражени збир вектора:

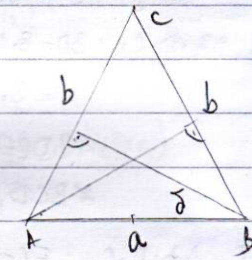
$2\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=2\vec{OP}+2\vec{PM}+2\vec{MA}+\vec{OP}+\vec{PM}+\vec{MB}+\vec{OP}+\vec{PN}+\vec{NC}=$

$=4\cdot\vec{OP}+\vec{NM}+(-\vec{AB})+\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC}=$

$=4\vec{OP}+\vec{NA}+\vec{AM}-\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC}=$

$=4\vec{OP}-\cancel{\frac{1}{2}\vec{AC}}+\cancel{\frac{1}{2}\vec{AB}}-\cancel{\frac{1}{2}\vec{AB}}+\cancel{\frac{1}{2}\vec{AC}}=4\vec{OP}$. ■

(5) Висина која одговара краку, образује са основицом једнакокраког троугла угао δ. Изразити преко δ све унутрашње и спољашње углове троугла



$\alpha+\delta=90^\circ$

$\alpha=90-\delta=\beta$

$\gamma=180-2(90-\delta) \Rightarrow \gamma=2\delta$

$\alpha_1=180-90+\delta=90+\delta=\beta_1$

$\gamma_1=180-2\delta$.