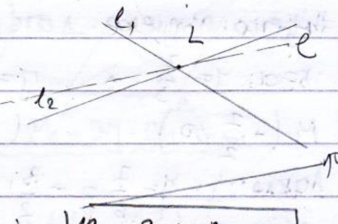
(1) (I) Одредити једначину праве која садржи тачку пресека правих $x-3y+2=0$ и $5x+6y-4=0$ и паралелна је са правом $4x-y+7=0$

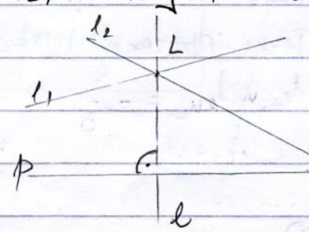


Реш: пресечна тачка се добија решавањем система

$$\left.\begin{array}{l} x=3y-2 \\ 15y-10+6y-4=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=3y-2 \\ 21y=14 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=\frac{2}{3} \\ x=0 \end{array} \quad L\left(0,\frac{2}{3}\right)$$

$p:\ y-\frac{2}{3}=k_p(x-0)$ тј. $y-\frac{2}{3}=4x$ одакле је: $\boxed{12x-3y+2=0}$

(II) Одредити једначину праве која садржи пресек правих $3x-y+4=0$ и $4x-6y+3=0$ и нормална је на праву $5x+2y+6=0$.



Слично као за I случај:

$$\left.\begin{array}{l} y=3x+4 \\ 4x-18x-24+3=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y=3x+4 \\ -14x=21 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{array} \quad L\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$k_l \cdot k_p=-1$ тј. $k_l=\frac{2}{5}$

$p:\ y+\frac{1}{2}=\frac{2}{5}\left(x+\frac{3}{2}\right)$ $\quad \boxed{4x-10y+1=0}$

(2) Написати ј-ну кружнице која садржи дате тачке:

(I) $A(-2,9)$, $B(-4,5)$, $C(5,8)$

$$\left.\begin{array}{l} (-2-p)^2+(9-q)^2=r^2 \\ (-4-p)^2+(5-q)^2=r^2 \\ (5-p)^2+(8-q)^2=r^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 4p-18q+85=8p-10q+41 \\ 4p-18q+85=-10p-16q+89 \\ (I) \end{array} \quad \left\} \begin{array}{l} 4p+8q=44 \\ 14p-2q=4 \\ (I) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} p+2q=11 \\ 14p-2q=4 \\ (I) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} p=1 \\ q=5 \end{array} \quad r^2=9+16=25 \quad \boxed{K:\ (x-1)^2+(y-5)^2=25}$$

(II) $A(-3,0)$ $B(2,5)$ $C(3,2)$

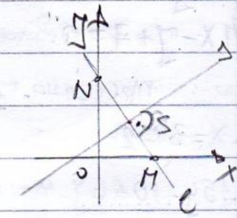
$$\left.\begin{array}{l} (-3-p)^2+q^2=r^2 \\ (2-p)^2+(5-q)^2=r^2 \\ (3-p)^2+(2-q)^2=r^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 6p+9=-4p-10q+29 \\ 6p+9=-6p-4q+13 \\ (I) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 10p+10q=20 \quad /:10 \\ 12p+4q=4 \quad /:4 \\ (I) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} p+q=2 \\ 3p+q=1 \\ (I) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2p=-1 \\ q=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \end{array} \quad p=-\frac{1}{2} \quad \left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2=r^2 \ \text{ тј } \ r^2=\frac{25}{2}$$

$$\boxed{K:\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}}$$

③ (I) Написати јнч праве која је нормална на праву $2x-3y+7=0$ и садржи средиште њеног одсечка између координатних оса.

Нађемо пресеке дате праве и координатних оса



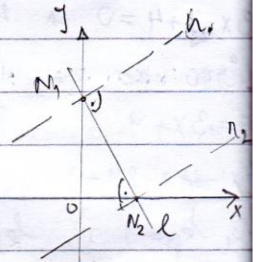
$x=0:\ y=\frac{7}{3} \ \wedge \ y=0:\ x=-\frac{7}{2}$ Дакле:

$M\left(-\frac{7}{2},0\right)$ и $N\left(0,\frac{7}{3}\right)$, па је: $S\left(-\frac{7}{4},\frac{7}{6}\right)$

Дакле: $y-\frac{7}{6}=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{7}{4}\right)$; $y-\frac{7}{6}=-\frac{3}{2}x-\frac{21}{8} \ /\cdot 24$

$24y-28=-36x-63$. $\boxed{l:\ 36x+24y+35=0}$

(II) Одредити јне двеју нормала праве $y=3x+1$ које садрже њене тачке пресека са координатним осама.



Тачке пресека: $x=0:\ y=1$; $y=0:\ x=-\frac{1}{3}$.

$k_{n_1}=k_{n_2}=-\frac{1}{3}$; $n_1:\ y-1=-\frac{1}{3}x \Rightarrow \boxed{x+3y-3=0:\ n_1}$

$n_2:\ y=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \boxed{3x+9y+1=0:\ n_2}$

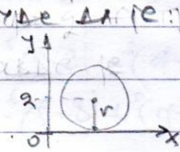
④ (I) Одредити параметар k тако да кружница

$x^2+y^2-(5k-1)x+(4-2k)y-5k=0$ додирује осу Ox.

$\left(x-\frac{5k-1}{2}\right)^2-\left(\frac{5k-1}{2}\right)^2+\left(y-(2-k)\right)^2-(2-k)^2-5k=0$. Дакле,

$p=\frac{5k-1}{2}$; $q=2-k$; $r^2=\left(\frac{5k-1}{2}\right)^2+(2-k)^2+5k=\frac{29k^2-6k+17}{4}$

Да би кружница додиривала осу Ox, мора да буде да је:

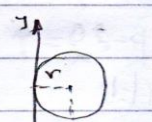


$q=r \Rightarrow q^2=r^2:\ 4-4k+k^2=\frac{29k^2-6k+17}{4}$

$16-16k+4k^2=29k^2-6k+17 \Rightarrow 25k^2+10k+1=0$

Ово је квадрат бинома: $(5k+1)^2=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{5}$

(II) Одредити параметар k тако да кружница:



$x^2+y^2+(k-4)x-ky+2k+5=0$ додирује осу Oy.

$\left(x-\frac{k-4}{2}\right)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=\left(\frac{k-4}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2-2k-5$

Да би кружница додиривала Oy осу, мора да је $p=r \Rightarrow p^2=r^2$

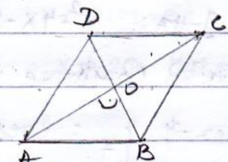
$\cancel{\left(\frac{k-4}{2}\right)^2}=\cancel{\left(\frac{k-4}{2}\right)^2}+\left(\frac{k}{2}\right)^2-2k-5$.

$\frac{k^2}{4}-2k-5=0 \Rightarrow k^2-8k-20=0 \Rightarrow k_{1,2}=\frac{8\pm 12}{2}=\begin{cases}10\\-2\end{cases}$

Дакле, $k=10$ или $k=-2$.

5) Два супротна темена ромба су $A(1,3)$ и $C(5,9)$, а страница $AB: x-y+2=0$

Одредити координате друга два темена.



Тачка O је средиште дужи AC: $O(3,6)$ дијагонала

$BD \perp AC$; $k_{AC} = \frac{9-3}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, па је $k_{BD} = -\frac{2}{3}$

$BD: y - y_0 = k_{BD}(x - x_0) \Rightarrow y - 6 = -\frac{2}{3}(x-3) \,/\cdot 3$ $\quad BD: 2x+3y-24=0$

$\{B\} = BD \cap AB: \left.\begin{matrix} 2x+3y-24=0 \\ x-y+2=0 \,/\cdot 3 \end{matrix}\right\}$ $\quad 5x = 18$, $x = \frac{18}{5}$ $\quad y = \frac{28}{5}$ $\quad \boxed{B\left(\frac{18}{5}, \frac{28}{5}\right)}$

$CD \parallel AB \wedge C \in CD: \quad y - y_C = k_{AB}(x - x_C) \quad k_{AB} = k_{CD} = 1$

$y - 9 = x - 5 \quad CD: x - y + 4 = 0$

$\{D\} = BD \cap CD: \left.\begin{matrix} x-y+4=0 \,/\cdot 3 \\ 2x+3y-24=0 \end{matrix}\right\}$ $\quad 5x = 12 \quad x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{32}{5}$ $\quad \boxed{D\left(\frac{12}{5}, \frac{32}{5}\right)}$