

# MATURSKI ISPIT IZ MATEMATIKE

## ZADACI

1. Uprostiti izraz:

$$\left( \frac{3}{a-1} - \frac{3a^2 + 3a + 3}{a^2 - 1} : \frac{a^4 - a}{a^3 + 1} \right) \cdot \frac{a - a^2}{3}$$

2. Uprostiti izraz:

$$\left( \frac{2}{m^2 - m} - \frac{2m}{1 - m^2} \right) \cdot \frac{2m^2 + 2m}{m^3 - 1} + \frac{4}{m - 1}$$

3. Uprostiti izraz:

$$\left( \left( \frac{3}{x-y} + \frac{3x}{x^3 - y^3} \cdot \frac{x^2 + xy + y^2}{x+y} \right) : \frac{2x+y}{x^2 + 2xy + y^2} \right) \cdot \frac{3}{x+y}$$

4. Uprostiti izraz:

$$\frac{3x-6}{x+2} \left( \frac{3}{x-2} + \frac{3x}{x^3-8} \cdot \frac{x^2+2x+4}{x+2} \right) : \frac{2x+2}{x^2+4x+4}$$

5. Rešiti jednačinu:

$$\frac{z-1}{2z^2-18} - \frac{4z+1}{4z^2-36} + \frac{2}{z+3} = \frac{3}{2z-6}$$

6. Rešiti jednačinu:

$$\frac{6z+5}{4z+3} - \frac{7-3z}{3-4z} = \frac{12z^2+30z-21}{16z^2-9}$$

7. Rešiti jednačinu:

$$\frac{10x-18}{12x^2-27} - \frac{1}{2x+3} + \frac{4}{18x-27} - \frac{5}{9(2x-3)} = 0$$

8. Dat je skup funkcija  $y = (4m - 6)x - (3m - 2)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Odrediti  $m$  tako da funkcija ima nulu  $x=2$ . Za nađenu vrednost  $m$  ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

9. Dat je skup funkcija  $y = (k - 2)x - (k - 1)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Odrediti  $k$  tako da njen grafik bude paralelan sa grafikom funkcije  $y=2x-6$ . Za nađenu vrednost  $k$  ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

10. U skupu funkcija  $y = (a - 4)x - (3a - 10)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  odrediti parametar  $a$  tako da tačka  $M(1,2)$  pripada grafiku funkcije. Za nađenu vrednost parametra  $a$  ispitati unkciju i nacrtati njen grafik.

11. Rešiti sistem:

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{5} - \frac{6z+x}{2} &= 2 \\ \frac{y-2x}{3} + \frac{6z+5x}{4} &= 0 \\ \frac{y+6}{7} - \frac{x-2}{21} &= \frac{2-z}{3} \end{aligned}$$

12. Rešiti sistem:

$$\begin{aligned} \frac{z+4}{4} - \frac{y+9z+2}{20} &= \frac{x-4}{5} \\ \frac{3y-3x}{7} - \frac{2x-z}{2} &= y+2 \end{aligned}$$

$$\frac{5y - z}{2} - \frac{2z - 2x}{3} = 5$$

13. Rešiti sistem:

$$\begin{aligned} \frac{18x + 2y - 5z + 15}{6} - \frac{8x - y + 4z}{13} &= 0 \\ \frac{4x + 2}{3} - \frac{9x - 2y + z - 1}{9} &= \frac{y + 2x}{4} \\ \frac{4x - 5y + 2}{2} - \frac{5x - 2y - 3z + 1}{13} &= \frac{z - 2x - 5y}{7} \end{aligned}$$

14. U jednačini  $\frac{a+x}{x} + \frac{a}{x} = \frac{a}{x-1} + \frac{x}{x-1}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , odrediti realni broj tako da rešenje po  $x$  bude veće od 6.

15. Za koje vrednosti realnog broja jednačina  $\frac{x}{x-2n} + \frac{2x-n}{x^2-2nx} = 1$  ima rešenje manje od 1?

16. Data je jednačina po  $x$   $\frac{9b^2-8}{2x+4} + \frac{4-3b^2}{2-x} = \frac{4b+3b^2x}{x^2-4}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Rešiti jednačinu po  $x$ , a zatim odrediti realan broj  $b$  tako da je  $x < 1$ .

17. Rešiti nejednačinu:

$$\frac{x}{x+3} - \frac{x-3}{x} > \frac{9-x}{x^2+3x}$$

18. Rešiti nejednačinu:

$$\frac{2-x}{x+1} + \frac{x+2}{x-1} < \frac{7x-x^3}{x^2-1}$$

19. Rešiti nejednačinu:

$$\frac{4x}{4x^2-9} + \frac{x}{2x-3} < \frac{1}{2x^2+3x}$$

20. Ako je  $A = \frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$  i  $B = \left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right) \cdot (a^{-1}-b^{-1}) \cdot (a^{-2}+b^{-2})^{-1}$ , dokazati da je  $A = B^{-1}$ .

21. Dokazati da je  $\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1} + \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} - \frac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^1} = 2b$ , ( $a \neq 0, b \neq 0$ )

22. Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{x-x^{-2}}{x^{-2}+x^{-1}+1} - \frac{x-x^{-1}}{1+x^{-2}+2x^{-1}}\right) : \frac{1-x^{-1}}{1+x^{-1}}$$

23. Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{a+a^{-1}-1}{a+a^{-1}} - \frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}+2}\right) : \frac{a^{-1}}{1+a^{-1}}$$

24. Izračunati:

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}}\right) \cdot (\sqrt{6}+11)$$

25. Izračunati:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}}\right) \cdot (\sqrt{3}+5)^{-1}$$

26. Uprostiti izraz:

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}} + \left(\frac{a\sqrt{a}+x\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}} - \sqrt{ax}\right) : (a-x), (x > 0, a > 0)$$

27. Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}, (a > 0)$$

28. Dokazati

$$\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}\right) \cdot \frac{a\sqrt{ab}}{a+b} - \frac{2b}{a-b} = 2, (a > 0, b > 0, a \neq b)$$

29. Dokazati da je  $z = (1+i)^4 - (1-i)^4$  realan broj.

30. Izračunati  $\left(\frac{3}{1+i} + \frac{1+i}{2i}\right)^{16}$ .

31. Dat je kompleksni broj  $z_1 = 2 - 3i$ . Odrediti kompleksan broj  $z = x + yi$  koji zadovoljava konjukciju  $Re(z \cdot z_1) = 18 \wedge Im\left(\frac{z}{z_1}\right) = \frac{1}{13}$ .

32. Dat je kompleksni broj  $z_1 = 2 + i$ . Odrediti kompleksan broj  $z = x + yi$  koji zadovoljava konjukciju  $Re\left(\frac{z}{z_1}\right) = -\frac{3}{5} \wedge Im(\bar{z} \cdot z_1) = 1$ .

33. Rešiti jednčinu:

$$\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{x+3}{3-x} - \frac{4+x}{3+x}$$

34. Rešiti jednčinu:

$$\frac{2x}{x-9} - \frac{x^2+25}{x^2-81} = \frac{5}{x+9} - \frac{5}{x-9}$$

35. Rešiti jednčinu:

$$\frac{x+1}{x^2-3x} + \frac{x}{2x^2-18} - \frac{2x-3}{x^2+3x} = \frac{18}{10x-30}$$

36. Odrediti sve realne vrednosti parametra  $a$  za koje jednačina

$$\frac{2x}{a^2+3a} - \frac{1}{3a-a^2} = \frac{x^2+8}{a^2-9}$$

ima realne vrednosti po  $x$ .

37. Odrediti sve realne vrednosti parametra  $a$  za koje jednačina

$$\frac{x-a}{x-2} + \frac{10}{x+2} + \frac{44}{x^2-4} = 0$$

ima realne vrednosti po  $x$ .

38. Data je jednačina  $3x^2 + 5x - 6 = 0$ . Ne rešavajući ovu jednačinu formirati jednačinu po  $y$  čija su rešenja  $y_1$  i  $y_2$  povezana sa rešenjima  $x_1$  i  $x_2$  dve jednačine pomoću  $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}, y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$ .

39. Ako su  $x_1$  i  $x_2$  rešenja kvadratne jednačine  $3x^2 - x - 7 = 0$  napisati kvadratnu jednačinu po  $y$  čija su rešenja  $y_1 = x_1^3 + x_2^3, y_2 = x_1^3 \cdot x_2^3$ .

40. Ne rešavajući jednačinu  $3x^2 - 4x + 1 = 0$  sastaviti kvadratnu jednačinu  $y^2 + py + q = 0$  po  $y$  čija su rešenja  $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_1 \cdot x_2$ .

41. Dat je skup funkcija  $y = ax^2 - 2x - 5$ . Odrediti parametar  $a$  tako da odgovarajuća funkcija dostiže maksimalnu vrednost  $y_{min} = -2$ . Ispitati promene i nacrtati grafik dobijene funkcije.

42. Dat je skup parabola  $y = ax^2 - (2a+1)x + 2(a+1), a \in \mathbb{R}$ . Odrdeiti onu parabolu koja dostiže maksimalnu vrednost za  $x=2$ . Ispitati promene i nacrtati grafik dobijne funkcije.

43. Za koje vrednosti  $x$  razlomak  $\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}$  manji od  $-1$ ?

44. Za koje vrednosti  $x$  razlomak  $\frac{x^2+2x-63}{x^2-8x+7}$  većii od  $7$ ?

45. Za koje vrednosti  $x$  razlomak  $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}$  veći od  $-3$ ?

46. Data je jednačina  $2x^2 + (a-9)x + a^2 + 3a + 4 = 0$ . Odrediti realne vrednosti parametra  $a$  za koje data jednačina ima realna rešenja.

47. Jednačina  $(m^2 + 5)x^2 + 2(m + 3)x + 3 = 0$  nema realnih rešenja ni za jednu vrednost parametra  $m$ . Dokazati.

48. Rešiti sistem:

$$\begin{aligned}3x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 4y &= 3 \\ x - 5y &= -5\end{aligned}$$

49. Rešiti sistem:

$$\begin{aligned}9x^2 + 6xy + y^2 - 72x - 24y + 135 &= 0 \\ 3x - y - 9 &= 0\end{aligned}$$

50. Rešiti sistem:

$$\begin{aligned}3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y &= 0 \\ 2x - y + 5 &= 0\end{aligned}$$

51. Rešiti sistem:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + y + 1}{y^2 + x + 1} &= \frac{3}{2} \\ x - y &= 1\end{aligned}$$

52. Rešiti jednačinu:

$$\sqrt{7x + 1} - \sqrt{3x - 18} = 5$$

53. Rešiti jednačinu:

$$\sqrt{2x + 8} + \sqrt{x + 5} = 7$$

54. Rešiti jednačinu:

$$\sqrt{10 + x} + \sqrt{10 - x} = \sqrt{2x - 8}$$

55. Rešiti jednačinu:

$$\sqrt{2x + 14} - \sqrt{x - 7} = \sqrt{x + 5}$$

56. Rešiti jednačinu:

$$2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$$

57. Rešiti jednačinu:

$$3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} + 3^{x-5} + 3^{x-6} = 364$$

58. Rešiti jednačinu:

$$2^{4x} + 2^{4x-1} + 4^{2x-1} + 2^{4x-3} + 16^{x-1} = 31$$

59. Rešiti jednačinu:

$$3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{5}{2}} = 31$$

60. Rešiti jednačinu:

$$2^{x-\frac{1}{2}} + 2^{x+\frac{1}{2}} + 2^{x+\frac{5}{2}} = 11\sqrt{2}$$

61. Rešiti jednačinu:

$$\log_7(6 + 7^{-x}) = 1 + x$$

62. Rešiti jednačinu:

$$\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$$

63. Rešiti jednačinu:

$$1 + \log_2(x - 1) = \log_{(x-1)}4$$

64. Rešiti jednačinu:

$$x^{1+\log_3 x} = 3x$$

65. Uprostiti izraz:

$$\frac{\sin \frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \left(-\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \cos 1000^\circ}{\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} \cdot \cos(-2\pi) \cdot \sin 170^\circ}$$

66. Uprostiti izraz:

$$\frac{\operatorname{ctg} 600^\circ \cdot \cos 2\pi \cdot \sin(-290^\circ)}{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos(-160^\circ)}$$

67. Uprostiti izraz:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{10}\right) \cdot \sin(-744^\circ) \cdot \cos \frac{7\pi}{4}}{\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) \cdot \cos(-246^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 396^\circ}$$

68. Izračunati  $\sin(\alpha - \beta)$  ako je  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\sin \beta = -\frac{24}{25}$  i ako je  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ,  $\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

69. Rešiti jednačinu:

$$\sin 2x - \cos x = 0$$

70. Rešiti jednačinu:

$$\cos x - \cos 2x = 1$$

71. Rešiti jednačinu:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$$

72. Rešiti jednačinu:

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x - 3 = 0$$

73. Rešiti jednačinu:

$$\sqrt{2} \sin^2 x + \cos x = 0$$

74. Rešiti jednačinu:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = 0$$

75. Odrediti stranicu  $b$  trougla ABC ako su njegove stranice  $a = 2\sqrt{3}\text{cm}$ ,  $c = \sqrt{6}\text{cm}$  i ugao  $\beta = 105^\circ$ .

76. U trouglu ABC dato je  $AB=24\text{ cm}$ ,  $AC=9\text{ cm}$  i ugao  $\alpha = 60^\circ$ . Odrediti stranicu BC i poluprečnik opisane kružnice.

77. Odrediti površinu trougla ABC ako je  $A(-3,-3)$ ,  $B(3,5)$  i  $C(-2,5)$  i visinu  $h_c$ .

78. Date su tačke  $A(2,-4)$  i  $B(2,-5)$ . Odrediti tačku C koja deli duž AB u razmeri 1:2, zatim D na x-osi, koja je podjednako udaljena od tačaka A i B i površinu trougla ABD.

79. Odrediti jednačinu prave kojoj pripada tačka  $P(4,3)$  i sadrži presek prave  $3x-5y-11=0$  i  $4x+y-7=0$ .

80. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku preseka pravih  $x-3y+2=0$  i  $5x+6y-4=0$  i paralelna je pravoj  $4x+y+7=0$ .

81. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku preseka pravih  $3x-y+4=0$  i  $4x-6y+3=0$  i normalna je pravoj  $5x+2y+6=0$ .

82. Odrediti dužinu visine  $h_c$  trougla sa temenima  $A(-3,1)$ ,  $B(5,-1)$  i  $C(6,5)$ .

83. Dat je trougao ABC čija su temena  $A(-5,-2)$ ,  $B(7,6)$ ,  $C(5,4)$ . Odrediti jednačinu stranice AB, jednačinu težišne duži  $t_a$  i koordinate težišta trougla.

84. Dat je trougao ABC čija su temena  $A(-5,-2)$ ,  $B(7,6)$ ,  $C(5,4)$ . Odrediti jednačinu visine  $h_c$ , uglove A i B i koordinate težišta trougla.

85. Odrediti jednačinu kružnice koja sadrži tačke  $A(0,-2)$  i  $B(2,4)$ , a centar joj pripada x-osi.

86. Napisati jednačinu čiji je centar u preseku pravih  $2x+y-15=0$  i  $x-3y+17=0$ , a sadrži tačku  $A(9,-5)$ .

87. Napisati jednačinu kružnice kojoj pripadaju tačke  $A(5,4)$  i  $B(2,4)$ , a centar joj pripada pravoj  $x-2y-3=0$ .

88. Iz tačke  $P(1,7)$  konstruisane su tangente na kružnicu  $x^2 + y^2 = 25$ . Napisati njenu jednačinu.

89. Napisati jednačinu tangente elipse  $2x^2 + 3y^2 = 35$  koja je normalna na pravu  $3x - 8y - 24 = 0$

90. Napisati jednačinu one tangente elipse  $x^2 + 3y^2 = 28$  koja sa pravom  $x - 5y - 20 = 0$  gradi ugao od  $45^\circ$ .

91. Iz tačke A(-5,4) konstruisane su tangente na elipsu  $4x^2 + 25y^2 = 100$ . Naći jednačine tih tangenti.
92. Odrediti jednačinu tangente hiperbole  $9x^2 - 4y^2 = 32$ , koja je paralelna sa pravom  $9x + 2y - 1 = 0$ .
93. Iz tačke P(3,2) konstruisane su tangente na hiperbolu  $x^2 - 2y^2 = 2$ . Odrediti njihove jednačine.
94. Napisati jednačine zajedničkih tangenti krivih  $6x^2 + 10y^2 = 15$  i  $6x^2 - 10y^2 = 60$ .
95. Napisati jednačinu parabole ako je prava  $3x+y+3=0$  njena tangenta.
96. Iz tačke S(-2,-2) konstruisane su tangente na parabolu  $y^2 = 16x$ . Odrediti jednačinu tangente i ugao između njih.
97. Odrediti četvoročlani aritmetički niz ako je zbir kvadrata srednjih članova 468, a zbir kvadrata krajnjih 612.
98. Odrediti aritmetički niz kod koga je zbir drugog i sedmog člana 25, a njihov proizvod 100.
99. Zbir prvih tri člana aritmetičkog niza je 15, a zbir njihovog kvadrata 173. Odrediti dvadeseti član i zbir prvih dvadeset članova niza.
100. Odrediti aritmetički niz kod koga je zbir petog i osmog člana 28, a razlika kvadrata petog i trećeg člana 72.
101. Četiri broja čine geometrijski niz. Naći te brojeve ako je prvi veći od drugog za 36, a treći od četvrtog za 4.
102. Prvi član geometrijskog niza je 5, a količnik 3. Koliko članova treba sabrati da bi se dobio zbir 16400?
103. Izračunati zbir prvih deset članova geometrijskog niza ako je prvi član 3, a količnik 2.
104. Izračunati prvi član geometrijskog niza ako je zbir prvih dvanaest članova 8190, a količnik 2.
105. Odrediti rastući geometrijski niz ako je  $a_5 - a_1 = 10 \wedge a_4 - a_2 = 4$ .
106. Tri broja, čiji je zbir 26 obrazuju geometrijski niz. Ako se tim brojevima doda redom 1, 6 i 3 dobijaju se tri broja koja obrazuju aritmetički niz. Naći te brojeve.
107. Četiri broja čine aritmetički niz. Ako se od svakog broja oduzme redom 2, 7, 9 i 5 dobijeni brojevi obrazuju geometrijski niz. Odrediti te brojeve.
108. Površina prave trostrane prizme jednaka je  $1440 \text{ cm}^2$ , a njena visina 16 cm. Izračunati osnovne ivice ako se one odnose kao 17:10:9.
109. Osnova prave prizme je romb čije su dijagonale  $d_1 = 18 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 24 \text{ cm}$ , dok je dijagonala bočne strane prizme 39 cm. Izračunati površinu prizme.
110. Površina pravog valjka je  $180\pi \text{ cm}^2$ , a razlika visine i poluprečnika osnove je 3 cm. Izračunati zapreminu valjka.
111. Izračunati površinu i zapreminu kupe ako je njena izvodnica za 1 cm duža od visine a prečnik osnove je 1 dm.
112. Odrediti prvi izvod funkcije  $y = \frac{x^2-4}{x^2-4x-5}$ .
113. Odrediti asimptote funkcije  $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ .
114. Odrediti monotonost i ekstremne vrednosti funkcije  $y = \frac{x^2}{x-2}$ .
115. Odrediti prvi izvod funkcije  $y = \frac{\ln x - 2}{\ln x}$ .