① Треба одредити знак I извода

(I група) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$ $3-x^2\neq 0$ тј. $D_f: x\in(-\infty,-\sqrt3)\cup(-\sqrt3,\sqrt3)\cup(\sqrt3,+\infty)$

$$y'=\frac{3x^2(3-x^2)+2x\cdot x^3}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-3x^2+2x^2)}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$$

Како су изрази $x^2>0 \wedge (3-x^2)^2>0$, $x\in D_f$, то знак I извода зависи од знака израза $9-x^2$:

$-\ \ +\,+\,+\,+\ \ -$ $\quad 9-x^2$; $\quad -3,\ -\sqrt3,\ 0,\ \sqrt3,\ 3$

$\searrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \searrow$ $\quad y$; $\quad -3,\ -\sqrt3,\ \sqrt3,\ 3$

$y\nearrow: x\in(-3,-\sqrt3)\cup(-\sqrt3,\sqrt3)\cup(\sqrt3,3)$

$y\searrow: x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

$y_{min}(-3)=\frac{-27}{-6}=\frac{9}{2}$; $y_{max}(3)=\frac{27}{-6}=-\frac{9}{2}$.

(II група) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ $x^2-1\neq0$ тј. $D_f: x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$+\,+\ \ -\,-\,-\,-\,-\ \ +\,+$ $\quad x^2-3$; $\quad -\sqrt3,\ -1,\ 1,\ \sqrt3$

$\nearrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ \nearrow$ $\quad y$; $\quad -\sqrt3,\ -1,\ 1,\ \sqrt3$

$y\nearrow: x\in(-\infty,-\sqrt3)\cup(\sqrt3,+\infty)$

$y\searrow: x\in(-\sqrt3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt3)$

$y_{max}(-\sqrt3)=-\frac{3\sqrt3}{2}$; $y_{min}(\sqrt3)=\frac{3\sqrt3}{2}$.

---

② Други извод:

(I група) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}}{\cancel{(x+\sqrt{1+x^2})}\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y''=-\frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=-\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

(II група) $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$

$$y'=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\cdot\frac{1}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2x}{3(1+x^2)}\ ;\ y''=\frac{2}{3}\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{3}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

---

③ Треба одредити знак II извода

(I група) $y=(x^2-4x+3)e^x$

$y'=(2x-4)e^x+(x^2-4x+3)e^x=(x^2-2x-1)e^x$,

$y''=(2x-2)e^x+(x^2-2x-1)e^x=(x^2-3)e^x$

$y''=0$ ако је $x_{1,2}=\pm\sqrt3$

$+\,+\,+\ \ -\,-\,-\ \ +\,+\,+$ $\quad y''$; $\quad -\sqrt3,\ \sqrt3$

$\smile\ \frown\ \smile$ $\quad y$; $\quad -\sqrt3,\ \sqrt3$

Дакле, преводне тачке су: $P_1(-\sqrt3,\ 2(3+2\sqrt3)e^{-\sqrt3})$; $P_2(\sqrt3,\ 2(3-2\sqrt3)e^{\sqrt3})$.

II група $y=xe^{-x}$

$y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$;

$y''=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$y''=0$ ако је $x=2$

$-\,-\,-\,-\ \ +\,+\,+\,+$ $\quad y''$; $\quad 2$

$\frown\ \smile$

Преводна тачка је $P(2,\frac{2}{e^2})$.

4) У овом задатку се примењују екстремне вредности ф-је.

(I група) Над одсечцима x и $12-x$ дате дужи, најпре треба формирати ф-је које представљају површине једнакостр. Δ.

$x \qquad 12-x$

$12\ cm$

$P_1(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ и $P_2(x) = \frac{(12-x)^2\sqrt{3}}{4}$, а затим их по услову зад. сабрати: Дакле:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2 + (12-x)^2\right).$$ Сада је:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2x - 2(12-x)\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(4x-24) = (x-6)\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{ccccc} & - - - & & + + + & f' \\ 0 & \searrow & 6 & \nearrow & f \end{array}$$

Минимална вредност ф-је је за $x=6$, а тражена површина износи: $P = P_1 + P_2 = 18\sqrt{3}\ cm^2$.

(II група) Обим правоугаоника је $O = 2(a+b)$, одакле је $a+b=8$.

Биће: $\left.\begin{array}{l} a = 8-b \\ P = a\cdot b \end{array}\right\}$ $P(b) = (8-b)\cdot b = 8b - b^2$, па је: $P'(b) = 8-2b$

$$\begin{array}{ccccc} & + + + + & & - - - & P' \\ 0 & \nearrow & 4 & \searrow & \end{array}$$

Дакле, за $b=4$ површина је максимална а како је тада: $a = 8-4 = 4$, четвороугао је квадрат странице 4 и његова $P = 16\ cm^2$

---

5) У овом задатку ученицима су била понуђена три задатка од којих могу да одаберу који ће да раде:

1° $$y' = \left(\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{\cancel{x^2+x+1}}{(x-1)^2}\cdot\frac{2(x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x-1)^2}{(x^2+x+1)^{\cancel{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(2x+1)^2}{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(2x^2+2x+2-2x^2+x+1)}{6(x-1)^{\cancel{2}}(x^2+x+1)} - \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{4x^2+4x+4} =$$

$$= \frac{3x+3}{6(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)} = \frac{\cancel{3x}+3-\cancel{3x}+3}{6(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^3-1}.$$

2° $$y' = \left(\ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)\right)' = \frac{1}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}}\left(\cos x + \frac{\cancel{2}\sin x\cos x}{\cancel{2}\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)$$

$$= \frac{\cos x}{\cancel{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{1+\sin^2 x}+\sin x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

3° $$y = \sqrt{\frac{x\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[4]{x+2}}{\sqrt[5]{x-3}\cdot\sqrt[7]{x+1}}}$$ Најпре логаритмујемо обе стране ф-је, па израчунамо извод:

$$\log y = \frac{1}{2}\left[\log x + \frac{1}{3}\log(x-1) + \frac{1}{4}\log(x+2) - \frac{1}{5}\log(x-3) - \frac{1}{7}\log(x+1)\right]$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{4(x+2)} - \frac{1}{5(x-3)} + \frac{1}{7(x+1)}\right],$$ па је:

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[4]{x+2}}{\sqrt[5]{x-3}\cdot\sqrt[7]{x+1}}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{4(x+2)} - \frac{1}{5(x-3)} + \frac{1}{7(x+1)}\right).$$