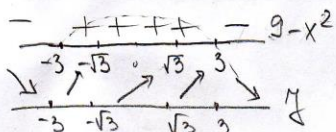


① ТРЕБА ОДРЕДИТИ ЗНАК I ИЗВОДА

(I ГРУПА) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ $3-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$$y' = \frac{3x^2(3-x^2) + 2x \cdot x^3}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(9-3x^2+2x^2)}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$$

КАКО ОТ ИЗРАЗИ $x^2 > 0$ И $(3-x^2)^2 > 0$, $x \in D_f$, ТО ЗНАК I ИЗВОДА ЗАВИСИ ОД ЗНАКА ИЗРАЗА $9-x^2$:



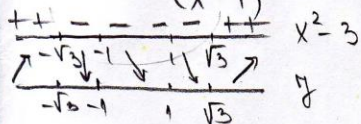
$y \uparrow: x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$

$y \downarrow: x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

$y_{\max}(-3) = \frac{-27}{-6} = \frac{9}{2}$; $y_{\max}(3) = \frac{27}{-6} = -\frac{9}{2}$.

(II ГРУПА) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$



$x^2-1 \neq 0 \Rightarrow D_f: x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

$y \uparrow: x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$y \downarrow: x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

$y_{\max}(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $y_{\min}(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

② ПРВИ ИЗВОД:

(I ГРУПА) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y'' = -\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

(II ГРУПА) $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \frac{1}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3(1+x^2)}$$
; $y'' = \frac{2}{3} \frac{1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{3} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

③ ТРЕБА ОДРЕДИТИ ЗНАК II ИЗВОДА

(I ГРУПА) $y = (x^2-4x+3)e^x$

$$y' = (2x-4)e^x + (x^2-4x+3)e^x = (x^2-2x-1)e^x$$
;

$y'' = 0$ АКО ЈЕ $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

$$-y'' = (2x-2)e^x + (x^2-2x-1)e^x = (x^2-3)e^x$$

ДАКЛЕ, ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ СУ:

II ГРУПА

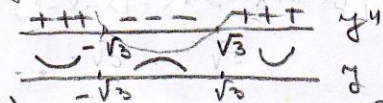
$y = xe^{-x}$

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$
;

$y'' = 0$ АКО ЈЕ $x = 2$

$$y'' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

ПРЕВОЈНА ТАЧКА ЈЕ $P(2, \frac{2}{e^2})$.



4) У ОВОМ ЗАДАТКУ ЋЕ ПРИМЕНЈУЈУ ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ ФЈЕ.

(I ГРУПА) НАД ОВЛЕУЦИМА x И $12-x$ ДАТЕ ДУЖИ, НАЈПРЕ ТРЕЋА ФОРМУЛАТИ ФЈЕ КОЈЕ ПРЕДСТАВЉАЈУ ПОВРШИНЕ ЈЕДНАКОСТИ Δ . 12 cm

$P_1(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ И $P_2(x) = \frac{(12-x)^2\sqrt{3}}{4}$, А ЗАТИМ ИХ ПО УСЛОВУ ЗАД.

ОБРАТИ: ДАКЛЕ: $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (x^2 + (12-x)^2)$. САДА ЈЕ:
 $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (2x - 2(12-x)) = \frac{\sqrt{3}}{4} (4x - 24) = (x-6)\sqrt{3}$ - - - + + +
0 → 6 → f'

МИНИМАЛНА ВРЕДНОСТ ФЈЕ ЈЕ ЗА $x=6$, А ТРАЖЕНА ПОВРШИНА ИЗЛОШ: $P = P_1 + P_2 = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

(II ГРУПА) ОБИМ ПРАВОУГОЛНИКА ЈЕ $O = 2(a+b)$, ДАКЛЕ ЈЕ $a+b=8$.

БИЋЕ: $a=8-b$ } $P(b) = (8-b) \cdot b = 8b - b^2$, ПА ЈЕ: $P'(b) = 8 - 2b$
 $P = a \cdot b$ + + + + - - - - P'

ДАКЛЕ, ЗА $b=4$ ПОВРШИНА ЈЕ МАКСИМАЛНА 0 → 4 →
 А КАКО ЈЕ ТАДА: $a=8-4=4$, ЧЕШВОУГОЛНО ЈЕ КВАДРАТ СТРАНИЦЕЈ И ЊЕГОВА $P=16 \text{ cm}^2$

5) У ОВОМ ЗАДАТКУ ИЧЕНИЦИМА СЈ БИЛА ПОУЧБЕНА ТРИ ЗАДАТКА ОД КОЈИХ МОЖЕ ДА ОДБЕРУ КОЈИ ЋЕ ДА ГРАДЕ:

$$1^\circ y' = \left(\frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)' =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{x^2+x+1 \cdot 2(x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(2x+1)^2}{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(x-1)(2x^2+2x+2-2x^2-x+1)}{6(x-1)^2(x^2+x+1)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4x^2+4x+4} =$$

$$= \frac{3x+3}{6(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)} = \frac{3x+3-3x-3}{6(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^2-1}$$

$$2^\circ y' = \left(\ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}) \right)' = \frac{1}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}} \left(\cos x + \frac{2 \sin x \cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} \right)$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sin^2 x} + \sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

3° $y = \sqrt[3]{\frac{x \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt{x+2}}{x-3 \cdot \sqrt[3]{x+1}}}$. НАЈПРЕ ЛОГАРИТМИЗЕМО ОБЕ СТРАНЕ ФЈЕ; ПА ИЗРАЧУНАМО ИЗВОД:

$$\log y = \frac{1}{2} \left[\log x + \frac{1}{3} \log(x-1) + \frac{1}{4} \log(x+2) - \frac{1}{5} \log(x-3) - \frac{1}{7} \log(x+1) \right]$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{4(x+2)} - \frac{1}{5(x-3)} + \frac{1}{7(x+1)} \right], \text{ ПА ЈЕ:}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt{x+2}}{x-3 \cdot \sqrt[3]{x+1}}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{4(x+2)} - \frac{1}{5(x-3)} + \frac{1}{7(x+1)} \right)$$