① (I група) $f(x^{-1}) = x + \sqrt{1+x^2}$ и $g(2x-1) = \frac{2x}{3}$, треба одредити $f(g^{-1}(x))$

Одредимо $f(x)$ смена: $x^{-1} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ тј. $f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$

$\boxed{f(x) = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}}$. Сад треба одредити и $g(x)$!

Увођењем смене: $p = 2x-1$ је $x = \frac{p+1}{2}$ тј. $\boxed{g(x) = \frac{x+1}{3}}$

Сада се одређује инверзна за $g(x)$:

$g^{-1}(g(x)) = x$; $g^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) = x$, а после краће замене је $\boxed{g^{-1}(x) = 3x-1}$

Коначно, композиција је: $f(g^{-1}(x)) = \frac{1+\sqrt{1+(g^{-1}(x))^2}}{g^{-1}(x)} = \frac{1+\sqrt{9x^2-6x+2}}{3x-1}$, $x \neq \frac{1}{3}$

(II група) $f(x+x^{-1}) = x^2 + x^{-2}$ $\wedge$ $g\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) = 5x+3$

Као у примеру I групе:

- $t = x + \frac{1}{x} \Big|^2$; $t^2 = x^2 + 2 + x^{-2} \Rightarrow x^2 + x^{-2} = t^2 - 2$; па је: $\boxed{f(x) = x^2 - 2}$
- $p = \frac{x+2}{2x+1}$; $2px + p = x + 2$; $x(2p-1) = 2-p$; $x = \frac{2-p}{2p-1}$, па је:

  $g(p) = 5\frac{2-p}{2p-1} + 3 = \frac{10-5p+6p-3}{2p-1}$; $\boxed{g(x) = \frac{7+x}{2x-1}}$
- Показује се да је и $\boxed{g^{-1}(x) = \frac{7+x}{2x-1}}$

  $g^{-1}(f(x)) = \frac{7+f(x)}{2\cdot f(x)-1} = \frac{x^2+5}{2x^2-5}$ ...

② (I група) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{8\sqrt{x} - x^2}{8 - 4\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}\,(8-(\sqrt{x})^3)}{4\,(2-\sqrt{x})} = \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}\,\cancel{(2-\sqrt{x})}(4+2\sqrt{x}+x)}{\cancel{2-\sqrt{x}}} = \frac{2}{4}\cdot 12 = 6$

(II група) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}\,((\sqrt{x})^3-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}\,\cancel{(\sqrt{x}-1)}(x+\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = 3.$

③ (I група) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{7-x}\right)^{\frac{2}{3}x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{+6}{7-x}\right)^{\frac{2}{3}x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-7}{6}}\right)^{\frac{2}{3}x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-7}{6}}\right)^{\frac{x-7}{6}\cdot\frac{6}{x-7}\cdot\frac{2}{3}x} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-7}{6}}\right)^{\frac{x-7}{6}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-7}} = e^4.$

(II група) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^{\frac{2x}{3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{12}{x-9}\right)^{\frac{2x}{3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-9}{12}}\right)^{\frac{2x}{3}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-9}{12}}\right)^{\frac{x-9}{12}\cdot\frac{12}{x-9}\cdot\frac{2x}{3}} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-9}{12}}\right)^{\frac{x-9}{12}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x}{x-9}} = e^8.$

④ (I група) Ф-ја је $y=\frac{2x^2-1}{x^2-4}$, дефинисана за $x\neq\pm 2$.

Дакле, има 2 вертикалне асимптоте: $x=2$, $x=-2$

$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{2x^2-1}{(x-2)(x+2)}=\frac{7}{4\cdot 0_+}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\frac{7}{4\cdot 0_-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to -2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -2+0}\frac{2x^2-1}{(x-2)(x+2)}=\frac{7}{-4\cdot 0_+}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x)=\frac{7}{-4\cdot 0_-}=+\infty$.

$y=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2-4}=2$, па је: $y=2$ хоризонтална асимптота

(II група) Ф-ја $y=\frac{4x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{4x^2-1}{(x-2)(x-1)}$, па је: $x\neq 2$ и $x\neq 1$

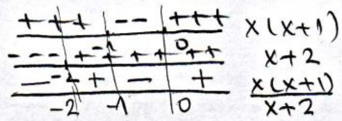
вертикалне асимптоте: $x=2$, $x=1$

$\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{4x^2-1}{(x-2)(x-1)}=\frac{15}{0_+}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{4x^2-1}{(x-2)(x-1)}=\frac{15}{0_-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{4x^2-1}{(x-2)(x-1)}=\frac{3}{-1\cdot 0_+}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{4x^2-1}{(x-2)(x-1)}=\frac{3}{-1\cdot 0_-}=+\infty$.

$y=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-1}{x^2-3x+2}=4$, па је $y=4$ хоризонтална асимпт.

⑤ (I група) $y=\log\frac{x(x+1)}{x+2}$

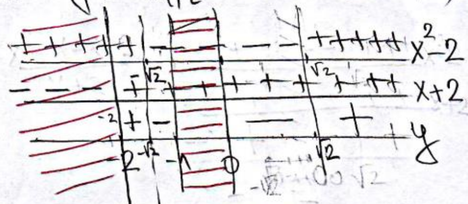


• Домен: $\frac{x(x+1)}{x+2}>0 \land x+2\neq 0$

$x\in(-2,-1)\cup(0,+\infty)$

• Нуле: $y=0$: $\frac{x(x+1)}{x+2}=1$; $x^2+\cancel{x}=\cancel{x}+2$ ⇒ $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ $A(\sqrt{2},0)$ $B(-\sqrt{2},0)$

• Знак $\log\frac{x(x+1)}{x+2}>0 \Rightarrow \frac{x(x+1)}{x+2}>1 \Rightarrow \frac{x^2+\cancel{x}-\cancel{x}-2}{x+2}>0$



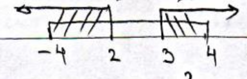
$y>0$: $x\in(-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

$y<0$: $x\in(-\sqrt{2},-1)\cup(0,\sqrt{2})$

(II група) $y=\sqrt{16-x^2}\,\log_2(x^2-5x+6)$

Домен: $16-x^2\geq 0 \land x^2-5x+6>0$

$x\in[-4,4] \land x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$



$x\in[-4,2)\cup(3,4]$

Знак: $\log_2(x^2-5x+6)>0$

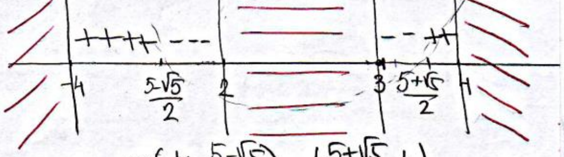
$x^2-5x+6>1$

$x^2-5x+5>0$

Нуле: $y=0$: $16-x^2=0$, $x_{1,2}=\pm 4$; $x^2-5x+6=1$, $x^2-5x+5=0$, $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

$(4,0)$, $(-4,0)$

$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},0\right)$ $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2},0\right)$



$y>0$: $x\in\left(-4,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2},4\right)$

$y<0$: $x\in\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},2\right)\cup\left(3,\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$