(1) $y=\dfrac{x^2+3x-4}{2x-x^2}$

Област деф.: $2x-x^2\neq 0 \Rightarrow x\neq 0 \wedge x\neq 2$ $\quad x\in(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$

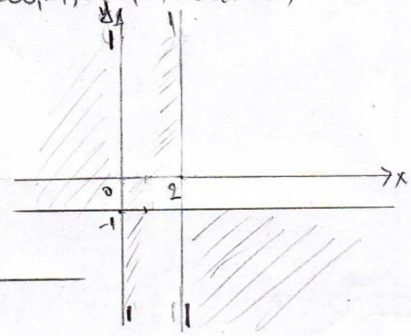
Нуле: $y=0$: $x_{1/2}=\dfrac{-3\pm 5}{2}=\begin{cases}1\\-4\end{cases}$ $\quad A(1,0)\ B(-4,0)$

Знак:

	-4	0	1	2	
$+++$	$---$		$++$	$++$	x^2+3x-4
$--$	$--$	$++$	$+$	$---$	$2x-x^2$
$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	y

$y>0$: $x\in(-4,0)\cup(1,2)$

$y<0$: $x\in(-\infty,-4)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$



Асимптоте:

• вертикалне: $x=0 \wedge x=2$

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^2+3x-4}{x(2-x)}=\dfrac{-4}{2\cdot 0+}=-\infty$; $\quad \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\dfrac{-4}{2\cdot 0-}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2+3x-4}{x(2-x)}=\dfrac{6}{2\cdot 0-}=-\infty$; $\quad \lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\dfrac{6}{2\cdot 0+}=+\infty$

• хоризонтална: $y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{\frac{2}{x}-1}=-1$; $y=-1$

• коса: нема.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-2x-1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1+2x^2-2x}{x^2+2x-3}\overset{*}{=}$

$x^2+2x-3\neq 0$

$x_{1/2}\neq\dfrac{-2\pm 4}{2}\neq\begin{cases}1\\-3\end{cases}$

Користећи ф-лу за разлику кубова $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ и растављање квадратног тринома на чиниоце ~~на~~ ?:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, биће:

$\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)+2x(x-1)}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+3x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+3)}=\dfrac{5}{4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{[(\sqrt{2x+1})^2-3^2]\cdot(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{[(\sqrt{x-2})^2-\sqrt{2}^2]\cdot(\sqrt{2x+1}+3)}=$

$\sqrt{x-2}\neq\sqrt{2}$

$x-2\neq 2$

$x\neq 4$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(2x+1-9)\cdot(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-2-2)\cdot(\sqrt{2x+1}+3)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2\cancel{(x-4)}(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{2x+1}+3)}=\cancel{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{\cancel{6}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-9}\right)^{\frac{2}{3}x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-9+12}{x-9}\right)^{\frac{2}{3}x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-9}{12}}\right)^{\frac{x-9}{12}\cdot\frac{\overset{4}{\cancel{12}}\cdot 2x}{\cancel{3}(x-9)}}=e^{8}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x}{x-9}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{1-\frac{9}{x}}=8$

(5) $g(x)=2x-1$; $\quad \left.\begin{aligned}g(x^2+xf(x))&=2\cdot(x^2+xf(x))-1\\ g(x^2+xf(x))&=4x^2-2x-1\end{aligned}\right\}$ $\quad 2(x^2+xf(x))\cancel{-1}=4x^2-2x\cancel{-1}$

$x^2+xf(x)=2x^2-x$; $\quad xf(x)=x^2-x$; $\quad \boxed{f(x)=x-1}$

$g^{-1}\circ g(x)=x$; $\quad g^{-1}(2x-1)=x \Rightarrow \boxed{g^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2}}$ $\qquad g^{-1}\circ f(x)=\dfrac{x}{2}$.

$2x-1=t$

или: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}+1)\sin 4x}{x}\cdot\dfrac{4}{4}=$

$=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}+1)\sin 4x}{4x}=8$.

① $y=\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}$

Област деф.: $x^2-4\neq 0 \Rightarrow x_{1,2}\neq \pm 2$: $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

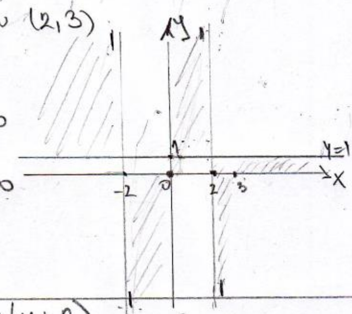
Нуле: $y=0$ $x^2-3x=0$ $x=0 \vee x-3=0$ $O(0,0)$; $A(3,0)$

Знак:

	-2	0	2	3	
x^2-3x	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
x^2-4	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
y	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$y>0$: $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)\cup(3,+\infty)$

$y<0$: $x\in(-2,0)\cup(2,3)$



Асимптоте:

• Вертикални: $x=-2$ и $x=2$

$\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-2+0}\dfrac{x^2-3x}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{10}{-4\cdot 0_+}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2-0} f(x)=\dfrac{10}{-4\cdot 0_-}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{x^2-3x}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{-2}{4\cdot 0_+}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)=\dfrac{-2}{4\cdot 0_-}=+\infty$

• Хоризонтална: $y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}}=1$; $\boxed{y=1}$

• Коса: нема.

② $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x}{x^4-2x^3+3x-6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x^2-4)}{x^3(x-2)+3(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^3+3)}=\dfrac{8}{11}$

③ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2]\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{[(\sqrt{1+x})^2-1]\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$

$\ulcorner \sqrt{1+x}\neq 1$
$x\neq 0 \lrcorner$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x-1+x)(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cancel{x}(\sqrt{1+x}+1)}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=2\cdot\dfrac{2}{2}=2.$

④ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+4}\right)^{\frac{x}{6}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4-6}{x+4}\right)^{\frac{x}{6}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x+4}{6}}\right)^{-\frac{x+4}{6}\cdot\left(-\frac{6}{x+4}\right)\cdot\frac{x}{6}}=e^{-1}$

$\ulcorner \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{x}{x+4}\right)=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{4}{x}}=-1 \lrcorner$

⑤ $f(x)=3x-1$ $f(3x+1+3\cdot g(x))=27x+29$

$$\left.\begin{aligned} f(3x+1+3\cdot g(x))&=3\cdot(3x+1+3g(x))-1\\ f(3x+1+3\cdot g(x))&=27x+29\end{aligned}\right\}\Rightarrow 9x+3+9\cdot g(x)-1=27x+29$$

$9g(x)=18x+27 \Rightarrow g(x)=2x+3$

$f^{-1}(f(x))=x$

$f^{-1}(3x-1)=x$

$t=3x-1 \Rightarrow x=\dfrac{t+1}{3}$

$f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{3}$

$f^{-1}\circ g(x)=f^{-1}(g(x))=\dfrac{2x+3+1}{3}=\dfrac{2(x+2)}{3}$

или: $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{\sin(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x+1}{\frac{\sin(x+1)}{x+1}}=\lim\limits_{x\to-1}(x^2-x+1)\left(\dfrac{\sin(x+1)}{x+1}\right)^{-1}=$

$=\lim\limits_{x\to-1}(x^2-x+1)\cdot\left(\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sin(x+1)}{x+1}\right)^{-1}=3\left(\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}\right)^{-1}=3\cdot1=3.$

$\ulcorner x+1=t$
$x\to-1: t\to 0 \lrcorner$