

IZVODI ZADACI (II deo)

U ovom delu ćemo pokušati da vam objasnimo traženje izvoda složenih funkcija.

Prvo da razjasnimo koja je funkcija složena? Pa, najprostije rečeno, to je svaka funkcija koje nema u tablici (tamo su samo elementarne funkcije) i čiji izvod se ne može naći primenom datih pravila.

Evo par primera:

Primer 1.

Nadi izvod funkcije $y = (1+5x)^{12}$

Kako da razmišljamo?

Da je data funkcija $y = x^{12}$, njen izvod bi bio $y' = 12 x^{11}$, i to ne bi bio problem. Ali mi umesto x-sa imamo $1+5x$ i to nam govori da je funkcija složena! Radimo isto kao za elementarnu funkciju, i dodamo izvod od onog što je

složeno! Dakle: $y = (1+5x)^{12}$

$$y' = 12(1+5x)^{11}(1+5x)' \quad [\text{od jedinice je izvod } 0, \text{ a od } 5x \text{ je izvod } 5]$$

$$y' = 12 (1+5x)^{11} 5$$

$$y' = 60 (1+5x)^{11}$$

Primer 2.

$$y = \sqrt{\sin x}$$

Podsetimo se : ako je $y = \sqrt{x}$ izvod je $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ali pošto unutar korena imamo $\sin x$, funkcija je složena!

$$y = \sqrt{\sin x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} (\sin x)'$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x$$

Primer 3.

Nadi izvod funkcije $y = e^{x^2+2x-3}$

Znamo da je $(e^x)' = e^x$. A pošto umesto x-sa imamo izraz $x^2 + 2x - 3$, to se znači radi o složenoj funkciji.

$$y = e^{x^2+2x-3}$$

$$y' = e^{x^2+2x-3} (x^2 + 2x - 3)'$$

$$y' = e^{x^2+2x-3} (2x + 2)$$

Primer 4.

Nadi izvod funkcije $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$

Od $\ln x$ funkcije izvod je $\frac{1}{x}$, ali ovde je umesto x- sa izraz $\frac{1+x}{1-x}$ pa radimo kao složenu funkciju! Dakle:

$$y = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' \quad \text{ovde pazimo, jer je } \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' \text{ izvod količnika!}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \frac{(1+x)'(1-x) - (1-x)'(1+x)}{(1-x)^2} \quad \text{skratimo po } 1-x$$

$$y' = \frac{1}{1+x} \frac{1-x+1+x}{1-x}$$

$$y' = \frac{1}{1+x} \frac{2}{1-x} \quad \text{u imeniocu je razlika kvadrata...}$$

$$y' = \frac{2}{1-x^2} \quad \text{konačno rešenje!}$$

ZNAČI: Radimo sve isto kao da je elementarna funkcija i pomnožimo sve sa izvodom od onog što je složeno!

Ako nismo ovo baš razumeli evo tablice izvoda složene funkcije, $y = f(u)$ a $u = g(x)$ pa je $y' = f'(u) g'(x)$

1. $(u^2)' = 2u u'$

2. $(u^n)' = nu^{n-1} u'$

3. $(a^u)' = a^u \ln a u'$

4. $(e^u)' = e^u u'$

5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$

6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$

7. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} u'$

8. $\sqrt{u}' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'$

9. $(\sin u)' = \cos u u'$

10. $(\cos u)' = -\sin u u'$

11. $(\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$

12. $(\operatorname{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$

13. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$

14. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$

15. $(\operatorname{arctgu})' = \frac{1}{1+u^2} u'$

16. $(\operatorname{arcctgu})' = -\frac{1}{1+u^2} u'$

ZADACI:

1. **Nadi izvod funkcije** a) $y = \sin^5 x$

b) $y = \sin 5x$

Rešenje:

Ovde moramo voditi računa, $\sin^5 x$ ćemo raditi kao drugi tablični, jer važi $\sin^5 x = (\sin x)^5$ dok ćemo $\sin 5x$ raditi kao deveti tablični, to jest kao $\sin u$, gde je $u = 5x$

a) $y = \sin^5 x$

$$y' = 5\sin^4 x (\sin x)'$$

$$y' = 5\sin^4 x \cos x$$

b) $y = \sin 5x$

$$y' = \cos 5x (5x)'$$

$$y' = \cos 5x \cdot 5 = 5\cos 5x$$

2. **Nadi izvod funkcije** $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

Rešenje: Ovde imamo višestruko složenu funkciju... **Najpre idemo izvod $\ln u$, gde je $u = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$**

$$y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}} \left(\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} \right)' \quad \text{sada radimo izvod } \sqrt{u}' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' \quad \text{gde je } u = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}} \left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right)' \quad \text{pazi: } \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \text{ je izvod količnika}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}} \frac{(1 - \sin x)'(1 + \sin x) - (1 + \sin x)'(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}} \frac{-\cos x(1 + \sin x) - \cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2}$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \frac{-\cos x - \cos x \sin x - \cos x + \cos x \sin x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \frac{-2 \cos x}{(1 + \sin x)^2} \quad \text{pokratimo šta može...}$$

$$y' = \frac{-\cos x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \quad \text{u imeniocu je razlika kvadrata}$$

$$y' = \frac{-\cos x}{1 - \sin^2 x} \quad \text{znamo da je } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$y' = \frac{-\cos x}{\cos^2 x} \quad \text{skratimo cos x}$$

$$y' = \frac{-1}{\cos x} \quad \text{konačno rešenje!}$$

3. Nadi izvod funkcije $y = \arctg \frac{1+x}{1-x}$

Rešenje: Kako razmišljamo?

Moramo raditi kao $(\arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} u'$ gde je $u = \frac{1+x}{1-x}$

$$y = \arctg \frac{1+x}{1-x}$$

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \quad \text{pazi: } \frac{1+x}{1-x} \text{ je izvod količnika i odmah ostalo sredjujemo'}$$

$$y' = \frac{1}{1 + \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \frac{(1+x)'(1-x) - (1-x)'(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{(1-x)^2 + (1+x)^2}{(1-x)^2}} \frac{1(1-x) + 1(1+x)}{(1-x)^2} \quad \text{pokratimo } (1-x)^2$$

$$y' = \frac{1}{1-2x+x^2+1+2x+x^2} \frac{1-x+1+x}{1} \quad \text{sredimo malo...}$$

$$y' = \frac{2}{2+2x^2} = \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)} \quad \text{Dakle, konačno rešenje je: } y' = \frac{1}{(1+x^2)}$$

4. Nadi izvod funkcije $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

Rešenje: Radimo po formuli $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$ gde je $u = \frac{2x}{1+x^2}$

$$y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \quad \text{sredjujemo dalje izraz pod korenom...}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-2x^2+x^4}} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$y' = \frac{1}{1-x^2} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1+x^2}{1+x^2} \text{ pokratimo... i dobijamo konačno rešenje} \quad y' = \frac{2}{1+x^2}$$

Podsetimo se teorijskog dela iz izvoda višeg reda...

Izvodi višeg reda

$y'' = (y')'$ \longrightarrow drugi izvod je prvi izvod prvog izvoda

$y''' = (y'')'$ \longrightarrow treći izvod je prvi izvod drugog izvoda

.....

$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ \longrightarrow n-ti izvod je prvi izvod (n-1)-vog izvoda

Znači da ovde praktično nema ničeg novog, jer mi ustvari uvek tražimo prvi izvod i naravno moramo da idemo redom, prvi izvod, pa drugi, pa treći itd...

Evo nekoliko primera:

Primer 1.

Odredi drugi izvod sledećih funkcija :

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$

b) $y = e^{-x^2}$

v) $y = \frac{1+x}{1-x}$

Rešenja:

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$
 $y' = 6x - 4$
 $y'' = 6$

b) $y = e^{-x^2}$ **Pazi, ovo je složena funkcija...**

$$y' = e^{-x^2} (-x^2)' = e^{-x^2} (-2x) = -2x e^{-x^2} \text{ evo ga prvi izvod, sad radimo kao izvod proizvoda, a konstanta } -2$$

ostaje ispred...

$$y'' = -2[x' e^{-x^2} + (e^{-x^2})' x]$$

$$y'' = -2[e^{-x^2} + (-2x e^{-x^2}) x] \text{ pa je } y'' = -2[e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}]$$

$$y'' = -2e^{-x^2} [1 - 2x^2] \text{ evo drugog izvoda}$$

v) $y = \frac{1+x}{1-x}$ **Najpre radimo kao izvod količnika...**

$$y' = \frac{(1+x)'(1-x) - (1-x)'(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$y' = \frac{1(1-x) + 1(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$y' = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$y' = \frac{2}{(1-x)^2} \text{ sada tražimo drugi izvod, ali radi lakšeg rada ćemo napisati } \frac{2}{(1-x)^2} = 2(1-x)^{-2} \text{ i ovo dalje}$$

radimo kao složenu funkciju...

$$y' = 2(1-x)^{-2}$$

$$y'' = 2(-2)(1-x)^{-2-1}$$

$$y'' = -4(1-x)^{-3}$$

$$y'' = \frac{-4}{(1-x)^3}$$

Primer 2.

Data je funkcija $f(x) = e^x \sin x$.

Dokazati da je tačna jednakost: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

Rešenje:

Mi dakle moramo naći prvi i drugi izvod funkcije $f(x) = e^x \sin x$ i to treba da zamenimo u datoj jednakosti!

$$f(x) = e^x \sin x$$

$$f'(x) = (e^x)' \sin x + (\sin x)' e^x$$

$$f'(x) = e^x \sin x + \cos x e^x \quad \text{Našli smo prvi izvod, sad tražimo drugi...}$$

$$f''(x) = (e^x \sin x)' + (\cos x e^x)'$$

$$f''(x) = (e^x)' \sin x + (\sin x)' e^x + (\cos x)' e^x + (e^x)' \cos x$$

$$f''(x) = e^x \sin x + \cos x e^x - \sin x e^x + e^x \cos x$$

$$f''(x) = 2e^x \cos x$$

Sada se vraćamo u početnu jednakost:

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = \quad \text{zamenimo...}$$

$$2e^x \cos x - 2(e^x \sin x + \cos x e^x) + 2e^x \sin x =$$

$$2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 2\cos x e^x + 2e^x \sin x = \text{sve se potire...} = 0$$

Time smo dokazali da je zaista $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

Primer 3.

Nadji n- ti izvod funkcije:

a) $y = e^{-2x}$

b) $y = \sin x$

Rešenje:

a) $y = e^{-2x}$

Pazi, izvod složene funkcije...

$$y' = e^{-2x}(-2x)' = -2 e^{-2x}$$

$$y'' = -2(-2 e^{-2x}) = 4 e^{-2x}$$

$$y''' = 4(-2 e^{-2x}) = -8 e^{-2x}$$

$$y^{iv} = -8(-2 e^{-2x}) = 16 e^{-2x}$$

.....

Pitamo se kako će izgledati n-ti izvod ?

Tu već nastaju mali problemi. Iz nekoliko prvih izvoda, najčešće 5,6 njih mi trebamo naći n-ti izvod.

Probamo da uočimo kako se ponašaju određeni članovi u izvodima.

Recimo, kod ovog primera se e^{-2x} javlja u svim izvodima, a ove brojke ćemo malo prepraviti...

$$y' = -2 e^{-2x} = (-2)^1 e^{-2x}$$

$$y'' = 4 e^{-2x} = (-2)^2 e^{-2x}$$

$$y''' = -8 e^{-2x} = (-2)^3 e^{-2x}$$

$$y^{iv} = 16 e^{-2x} = (-2)^4 e^{-2x}$$

Vidimo da (-2) ima onaj stepen koji je izvod u pitanju!

Iz ovoga zaključujemo da će n-ti izvod biti : $y^{(n)} = (-2)^n e^{-2x}$

Međutim, ovde posao nije gotov. Neki profesori zahtevaju da se ova formula dokaže i primenom matematičke indukcije. I u pravu su!

Proučite Matematičku indukciju (naravno na sajtu) i probajte da radi vežbe uradite ovaj dokaz.

b) $y = \sin x$

$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ veza u prvom kvadrantu (pogledaj temu II godina prebacivanje u I kvadrant)

$y'' = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$

$y''' = -\cos x = \sin(x + 3\frac{\pi}{2})$

$y^{(4)} = \sin x = \sin(x + 4\frac{\pi}{2})$ itd.

.....

Vidimo da svaki izvod možemo izraziti preko sinusa i još primećujemo da koji je izvod u pitanju taj je broj

uz $\frac{\pi}{2}$. Dakle n-ti izvod je $y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

I ovo naravno treba dokazati indukcijom!

NAPOMENA:

Ako funkcije $u=u(x)$ i $v=v(x)$ imaju u tački x_0 izvode do reda n , tada njihova linearna kombinacija $au + bv$, gde a i b pripadaju skupu R i njihov proizvod $u \circ v$ imaju takodje izvode do reda n u tački x_0 i pri tome važi:

1. $(au+bv)^{(n)} = a u^{(n)} + b v^{(n)}$

2. $(u \circ v)^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v'' + \dots + \binom{n}{n-1} u v^{(n-1)} + \binom{n}{n} u v^{(n)}$

Ova druga formula je poznata i kao Lajbnicova formula!

